

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences
de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

René MUSSON-GENON

1^{re} THÈSE : Application des méthodes rhéographiques à l'étude
des trajectoires électroniques planes, compte tenu
de la charge d'espace.

2^e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 4 Mars 1947, devant la Commission d'Examen :

MM. PÈRES, *Président.*

LUCAS
GRIVET } *Examineurs.*

ÉDITIONS DE LA
REVUE D'OPTIQUE THÉORIQUE ET INSTRUMENTALE

165, Rue de Sèvres — 3 et 5, Boulevard Pasteur.

PARIS 15^e

1947

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences
de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

René MUSSON-GENON

1^{re} THÈSE : Application des méthodes rhéographiques à l'étude
des trajectoires électroniques planes, compte tenu
de la charge d'espace.

2^e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 4 Mars 1947, devant la Commission d'Examen :

MM. PÉRÈS, *Président.*

LUCAS
GRIVET } *Examineurs.*

ÉDITIONS DE LA
REVUE D'OPTIQUE THÉORIQUE ET INSTRUMENTALE

165, Rue de Sèvres — 3 et 5, Boulevard Pasteur.

PARIS 15^e

1947

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... M. J. CABANNES.

PROFESSEURS

L. BLARINGHEM.....	T	Botanique.	Jacques BOURCART .	Géographie physique et Géologie dynamique.
G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	Mme JOLIOT-CURIE. T	Physique générale et Radioactivité.
C. MAUGUIN.....	T	Minéralogie.	PLANTEFOL.....	T Botanique.
A. DENJOY.....	T	Théorie des Fonctions.	CABANNES.....	T Recherches physiques.
L. LUTAUD.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	GRASSE	T Zoologie (Évolution des êtres organisés).
E. DARMOIS.....	T	Enseignement de Physique.	PRÉVOST.....	Chimie organique.
Robert LÉVY.....	T	Physiologie comparée.	BOULIGAND.....	T Application de l'analyse à la Géométrie.
Henri VILLAT.....	T	Mécanique des fluides et applications.	CHAUDRON.....	T Chimie.
Ch. JACOB.....	T	Géologie.	WYART.....	Minéralogie.
P. PASCAL.....	T	Chimie générale.	TEISSIER.....	T Zoologie.
M. FRÉCHET.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	MANGENOT.....	T Biologie végétale.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	P. AUGER.....	T Physique quantique et Relativité.
H. BÉGHIN.....	T	Mécanique physique expérimentale.	MONNIER.....	Physiologie générale.
FOCH.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	PIVETEAU.....	Géologie.
PAUTHENIER.....	T	Électrotechnique générale.	ROCARD.....	T Physique.
De BROGLIE.....	T	Théories physiques.	H. CARTAN.....	Calcul différentiel.
JOB.....	T	Chimie générale.	SCHAEFFER.....	T Physiologie des fonctions.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.	LAFITTE.....	Chimie (P. C. B.).
VILLEY.....	T	Mécanique appliquée.	LERAY.....	Mécanique théorique des fluides.
COMBES.....	T	Physiologie végétale.	FAVART.....	Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
GARNIER.....	T	Géométrie supérieure.	COULOMB.....	T Physique du globe.
PÉRÈS.....	T	Mécanique rationnelle.	Mlle COUSIN.....	Biologie animale (P. C. B.).
HACKSPILL.....	T	Chimie minérale.	CHRÉTIEN.....	Analyse et mesures chimiques.
LAUGIER.....	T	Physiologie générale.	DRACH.....	Évolution des êtres organisés.
TOUSSAINT.....	T	Technique aéronautique.	CHATELET.....	T Arithmétique et théorie des nombres.
M. CURIE.....	T	Physique (P. C. B.).	EPHRUSSI.....	T Génétique.
G. RIBAUD.....	T	Hautes températures.	WURMSER.....	T Biologie physico-chimique.
CHAZY.....	T	Mécanique analytique.	KASTLER.....	Physique.
H. GAULT.....	T	Chimie appliquée.	BAUER.....	T Chimie-Physique
CROZE.....	T	Physique théorique et physique céleste.	RIVIÈRE.....	Géologie (P. C. B.).
DUPONT.....	T	Théories chimiques.	GAUTHERET.....	T Biologie végétale (P. C. B.).
LANQUINE.....	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	LUCAS.....	Physique.
VALIRON.....	T	Calcul différentiel et calcul intégral.	MAX MORAND.....	Physique.
BARRABÉ.....		Géologie structurale et géologie appliquée.	ARNULF.....	Optique appliquée.
VAVON.....	T	Analyse et mesures chimiques.	A. THOMAS.....	Zoologie.
G. DARMOIS.....	T	Mathématiques générales.	SOLEILLET.....	Physique.
CHATTON.....	T	Biologie maritime.	FORTIER.....	Mécanique expérimentale des fluides.
AUBEL.....	T	Chimie biologique.	DANJON.....	T Astronomie.
			FROMAGEOT.....	Chimie biologique.
			LAPORTE.....	T Physique générale et Radioactivité.

Secrétaire..... R. UNIV. CH. MONIER.



APPLICATION DES MÉTHODES RHÉOGRAPHIQUES A L'ÉTUDE DES TRAJECTOIRES ÉLECTRONIQUES PLANES COMPTE TENU DE LA CHARGE D'ESPACE

par René MUSSON-GENON *

Docteur ès-Sciences Physiques

SOMMAIRE. — La première partie de ce travail est consacrée à la détermination graphique des trajectoires électroniques dans des champs de force constants dans le temps, en supposant connue la carte des potentiels de ces derniers. On rappelle et discute les principales méthodes connues, tant du point de vue des erreurs théoriques, dues aux approximations effectuées, que des erreurs (graphiques) dues aux constructions graphiques. Une méthode plus précise en général et des méthodes mieux adaptées à certains cas particuliers sont ensuite développées. On décrit un appareil permettant une mise en œuvre commode et précise de ces méthodes. Une application pratique dans un cas où la trajectoire peut être connue à priori a donné d'excellents résultats.

La deuxième partie traite de la détermination du potentiel dans les tubes à vide, compte tenu de la charge d'espace. On utilise pour cela une cuve électrolytique dont le fond est convenablement modelé, et l'on opère par approximations successives (alors que dans le cas où la charge d'espace est négligeable on utiliserait une cuve à fond plan). L'étude de la distribution du potentiel entre une cathode plane infinie et une anode plane et parallèle à la cathode a montré une rapide convergence des approximations successives. Il en a été de même pour l'étude de la forme d'un faisceau, de section finie.

Dans une troisième partie, on étend la méthode de la cuve rhéographique à fond modelé à la détermination de la fonction $\varphi(x,y)$ satisfaisant à une équation aux dérivées partielles du type $\Delta(\varphi(x,y)) = f(\varphi(x,y))$ et à des conditions aux limites données, sous réserve de la convergence des approximations successives et de la possibilité de figurer matériellement dans la cuve les conditions aux limites. Un exemple est donné concernant les champs hyperfréquences de révolution.

PRÉAMBULE

L'optique électronique et ses applications techniques se sont considérablement développées au cours des dernières années (microscope et loupe électronique, télescope électronique, multiplicateurs électroniques à émission secondaire, tubes à rayons X, tubes hyperfréquence,...).

Dans tous ces dispositifs on est conduit à considérer le mouvement d'un flot d'électrons introduits avec des vitesses initiales et en des points donnés, dans un champ électrique produit par des électrodes et des tensions données. Le problème se divise en deux parties. Il faut d'abord connaître la répartition du potentiel U , puis déterminer le mouvement des électrons dans le champ électrostatique décrit par cette répartition du potentiel.

Dans certains cas, la fonction U peut être déterminée mathématiquement, en particulier par l'emploi de la géométrie conforme ou de méthodes utilisant certains développements en série [1], [2], [3], [4], mais en général le problème ne peut être résolu directement. On utilise alors, pour déterminer la répartition des potentiels, des méthodes approchées numériques [5], [6], [7] ou graphiques [8], [9], [10], ou plus généralement des procédés analogiques. Les méthodes expérimentales sont nombreuses [11], [12], [13]. Parmi celles-ci, l'analogie rhéographique, utilisant une cuve électrolytique, est la plus pratique et la plus précise.

Pour des structures de révolution et, dans le cas où les électrons se déplacent au voisinage de l'axe, leur vitesse faisant un angle infiniment petit avec lui (approximation de Gauss de l'optique), on détermine les trajectoires électroniques par le calcul, à partir de la fonction potentielle, avec une précision aussi grande que l'on veut (microscope électronique). On ne sait pas résoudre ce problème dans le cas le plus général, mais l'emploi de certaines méthodes analogiques permet d'étudier les trajectoires planes dans le cas où la fonction U ne dépend que de deux paramètres.

On peut montrer que le mouvement plan des électrons [14], dans le cas de structures invariantes dans toute translation parallèle à une direction déterminée, peut être représenté par la projection sur un plan horizontal du mouvement d'un point matériel idéal glissant sans frottement sur une surface dont les cotes, en chaque point, sont proportionnelles aux valeurs du potentiel en ces points ($Z = k\varphi(x,y)$). On obtient cette surface à partir d'une membrane de caoutchouc convenablement tendue, en figurant les électrodes, à grande échelle, par des cylindres de bois qu'on pose sur un plateau horizontal et dont les hauteurs respectives sont proportionnelles aux potentiels des électrodes.

Cette méthode est peu précise et, en particulier, ne permet pas d'étudier les structures à symétrie de révolution, beaucoup plus fréquentes en pratique que les structures à symétrie plane, ce qu'on fait très facilement et avec grande exactitude en utilisant une cuve électrolytique.

MMrs GABOR [15] et LANGMUIR [16] ont mis au point des machines compliquées, permettant de tracer automatiquement les trajectoires avec une bonne approximation. On peut obtenir au moins

* Ingénieur au C. N. E. T. Division Tubes et Hyperfréquences.

une aussi bonne précision avec des moyens beaucoup plus simples, par l'emploi des méthodes graphiques.

Dans ce qui suit, nous considérerons le cas des structures de révolution (l'axe de révolution pouvant être à l'infini).

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude du mouvement plan d'un *électron isolé* se déplaçant dans un champ électrostatique satisfaisant aux données du problème. Des méthodes graphiques ont déjà été proposées. J'étudierai leurs conditions d'application et la précision qu'elles sont susceptibles de donner. J'indiquerai de nouvelles méthodes plus précises, ou mieux adaptées à certains problèmes.

On « éprouvera » ces diverses méthodes en les appliquant à l'étude de cas où le résultat peut être exactement déterminé par des considérations mathématiques simples.

La deuxième partie de ce travail est consacrée à l'étude des *faisceaux électroniques*. Les résultats obtenus dans la première partie s'appliquent en toute rigueur au cas d'un électron isolé, c'est-à-dire essentiellement au cas où l'on n'a pas à tenir compte des interactions électrostatiques entre les diverses particules chargées. Si l'on considère des faisceaux électroniques, la répartition du potentiel préexistant est modifiée du fait des densités de charges ainsi introduites. Pour de faibles densités électroniques, on peut négliger cet effet et considérer que chaque électron se déplace comme s'il était seul. Dès que les densités deviennent notables (au voisinage d'une cathode à oxyde en particulier), il faut obligatoirement tenir compte de l'effet de charge d'espace.

La distribution du potentiel U dans la région du faisceau électronique obéit alors à la loi de Poisson. Je montrerai que l'on peut produire à la surface de l'électrolyte cette distribution U en utilisant un fond de cuve convenablement modelé. La cote d'un point du fond comptée à partir de la surface libre de l'électrolyte est fonction de la valeur du potentiel et de l'intensité du courant électronique au point correspondant de la surface. Ces grandeurs n'étant généralement pas connues a priori, le fond exact sera déterminé par approximations successives.

Dans une troisième partie, pour illustrer les méthodes décrites, j'appliquerai les résultats précédents, ainsi que les résultats exposés dans la deuxième partie, à l'étude de cas où le résultat peut être obtenu directement par des considérations mathématiques simples.

Dans la quatrième partie, je montrerai que l'emploi de fonds modelés permet de résoudre d'autres problèmes que celui de la charge d'espace, pour un faisceau se déplaçant dans un champ électrostatique donné à l'avance : tels l'étude de la divergence des faisceaux électroniques dans des espaces dépourvus de champs appliqués ; la détermination des champs électromagnétiques de révolution dans les cavités, l'étude du champ magnétique dans les

machines, compte tenu des courants circulant dans les bobinages.

Ce travail a été commencé au Laboratoire Central des Télécommunications, puis continué à la Division Tubes et Hyperfréquences du Centre National d'Études des Télécommunications.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à Mr le Professeur PÉRÈS pour l'intérêt qu'il a porté à l'évolution de ce travail. Je prie aussi MMrs GOUDET et BLANC-LAPIERRE de trouver ici l'expression de ma gratitude pour les précieux conseils qu'ils m'ont donnés.

Je remercie enfin le personnel des Laboratoires pour leur cordial concours.

CHAPITRE I

ÉTUDES ET DESCRIPTIONS DE DIVERSES MÉTHODES DE TRACÉ GRAPHIQUE DES TRAJECTOIRES ÉLECTRONIQUES À PARTIR DE LA CARTE DU POTENTIEL.

RÉSUMÉ DU CHAPITRE I. — *Cette étude est consacrée à la détermination graphique des trajectoires électroniques dans des champs de forces constants dans le temps. On suppose connue la carte des potentiels de ces derniers ; elle a pu, par exemple, être obtenue par une étude à la cuve électrolytique.*

Toutes les méthodes graphiques reposent essentiellement sur le procédé suivant : l'espace est divisé en régions étroites par des équipotentiels successives assez voisines pour qu'il soit possible d'obtenir une bonne approximation sur la portion de trajectoire comprise entre deux telles équipotentiels S_1 et S_2 , à partir d'une représentation approchée du potentiel dans cette région. Si on connaît les conditions initiales sur S_1 , on a ainsi sur S_2 des conditions initiales permettant de continuer le tracé de S_2 à S_3 . Les erreurs commises dans une construction élémentaire sont infiniment petites avec la distance des équipotentiels S_1 et S_2 , et le nombre des constructions nécessaires pour décrire un arc fini de trajectoire est indéfiniment grand. Si l'on veut que l'erreur totale due aux approximations précédentes reste petite pour un arc fini de trajectoire, il faut que dans chaque construction élémentaire l'erreur commise soit au plus du second ordre par rapport à la distance de deux équipotentiels consécutives.

D'autre part, chacune de ces constructions élémentaires entraîne des erreurs graphiques dues aux opérations graphiques. L'effet global de ces dernières dépend de la nature des constructions graphiques et de leur nombre. On a évidemment intérêt, toutes choses égales d'ailleurs, à réduire leur nombre le plus possible. Cela conduit à rechercher une approximation théorique de meilleure en meilleure sur chaque construction élémentaire (Erreur du 3^e, du 4^e ordre, ... par rapport à la distance de S_1 à S_2).

Nous étudierons, à la lumière de ce qui vient d'être dit, les mérites respectifs des méthodes connues. En général, elles ne conduisent qu'à une approximation locale du 2^e ordre et quelquefois du 3^e ordre. Nous avons étudié de façon systématique les différentes méthodes précédentes, tant du point de vue de leur précision théorique que de ceux de leur précision graphique et de leurs conditions d'emploi. Ceci nous conduira, pour une des méthodes du 3^e ordre (parabole osculatrice), à préciser les conditions du choix des surfaces équipotentiels procurant la plus grande précision totale, et nous amènera à indiquer le principe d'un appareil original permettant une mise en œuvre commode et précise de cette méthode.

Les méthodes précédentes deviennent très imprécises lorsque la vitesse initiale de l'électron est faible et fait un angle important avec la direction du champ électrique (un tel cas se rencontre toutes les fois que l'on veut tenir compte des vitesses initiales à l'émission), ou si les rayons de courbure des lignes de champ et des surfaces équipotentiellles sont très petits (comme cela a lieu au voisinage d'une cathode par suite de la présence d'une électrode de Wehnelt). Nous avons mis au point diverses méthodes permettant de résoudre correctement ces cas plus délicats sans être conduit à des constructions compliquées. L'une de ces méthodes correspond à des constructions élémentaires donnant des erreurs du 4^e ordre seulement par rapport à l'écart de deux surfaces équipotentiellles consécutives.

Pour illustrer les considérations précédentes, nous avons appliqué cette dernière méthode, ainsi que celle de la parabole osculatrice, à l'étude d'un cas où la trajectoire est connue à priori : celle d'un électron se déplaçant dans un champ de forces créé par une charge ponctuelle.

Les méthodes précédentes sont en défaut si la vitesse initiale de l'électron est nulle, ou si elle s'annule entre les deux surfaces équipotentiellles considérées. Nous indiquerons, dans ces cas, des méthodes permettant de résoudre ces problèmes.

INTRODUCTION

GÉNÉRALITÉS. — Dans la plupart des structures électroniques à symétrie de révolution intervenant dans la technique des tubes à vide, les électrons se déplacent loin de l'axe de révolution ; leur vitesse fait souvent un angle important avec l'axe : on ne se trouve plus dans le cas de l'approximation de Gauss. Les méthodes applicables dans le cadre de cette approximation ne sont plus valables : on est, en général, réduit à construire les trajectoires électroniques de façon approchée, en opérant *élément par élément*.

Les méthodes utilisées sont alors essentiellement des méthodes graphiques. Nous aurons à considérer deux sortes d'erreurs : les unes tiennent au caractère approximatif des méthodes, nous les appellerons les *erreurs théoriques* ; les autres sont dues à l'imprécision graphique, nous les appellerons *erreurs graphiques*. L'erreur effective ou erreur totale résulte de la composition des deux.

Considérons d'abord les erreurs théoriques. Chaque point A pris sur une trajectoire électronique peut être repéré par le potentiel U_A de la surface équipotentielle S_A qui passe en ce point.

Toutes les propriétés géométriques d'une trajectoire électronique sont contenues dans la connaissance de la fonction :

$$(0) \quad A = A(U).$$

Les propriétés cinématiques découlent de la connaissance des variations de A en fonction du temps, ou mieux de la durée de transit τ sur la trajectoire :

$$A = A(\tau).$$

En réalité la relation (0) suffit à déterminer complètement le mouvement, car la grandeur du vecteur vitesse ne dépend que du potentiel U au point considéré, à cause du *théorème des forces vives*.

Précisons ce que nous entendons par l'expression « construire la trajectoire élément par élément ». Ceci veut dire que nous nous donnons des valeurs $U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$, du potentiel et que nous cherchons à déterminer les points correspondants de la trajectoire $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$. Les intervalles $\Delta U_i = U_{i+1} - U_i$ seront tous assez petits pour que nous puissions utiliser des méthodes approchées pour passer de A_i à A_{i+1} . L'erreur E sur la position du point A_n est la somme des erreurs e_i sur les vecteurs élémentaires $\vec{A_i A_{i+1}}$.

Si l'on veut que l'erreur E sur la position finale A_n soit infiniment petite, il faudra que les erreurs composantes e_i sur chaque construction élémentaire soient au moins du second ordre en ΔU .

Soit $A = A(U)$ la trajectoire réelle et $\vec{V} = \vec{V}(U)$ la vitesse de l'électron lorsqu'il traverse la surface équipotentielle correspondant au potentiel U.

Supposons que A_1 et $\vec{V}_1$ soient les valeurs correspondant au potentiel U_1 : dans le voisinage de A_1 on aura pour tout point A de la trajectoire :

$$(1) \quad \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{\gamma}_1 \tau + \vec{\gamma}_2 \tau^2 + \vec{\gamma}_3 \tau^3 + \dots$$

où τ représente le temps mis par l'électron pour aller de A_1 en A. Les vecteurs $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3, \dots$ sont définis par la distribution du potentiel au voisinage de A_1 et par la vitesse initiale. Par intégration, on déduit de la relation précédente :

$$(2) \quad \vec{A_1 A} = \vec{V}_1 \tau + \vec{\gamma}_1 \frac{\tau^2}{2} + \vec{\gamma}_2 \frac{\tau^3}{3} + \vec{\gamma}_3 \frac{\tau^4}{4} + \dots$$

Si maintenant on utilise une construction approchée, on aura, en affectant de l'indice « prime » les grandeurs définissant la trajectoire approchée :

$$(3) \quad \vec{V}' = \vec{V}_1 + \vec{\gamma}_1 \tau + \vec{\gamma}'_2 \tau^2 + \vec{\gamma}'_3 \tau^3 + \dots$$

$$(4) \quad \vec{A_1 A'} = \vec{V}_1 \tau + \vec{\beta}'_1 \frac{\tau^2}{2} + \vec{\beta}'_2 \frac{\tau^3}{3} + \dots$$

La représentation approchée doit donner $\vec{A_1 A}$ au deuxième ordre près. C'est pour cela que les parties principales de $\vec{A_1 A}$ et $\vec{A_1 A'}$ sont égales, ainsi que le premier terme en τ des expressions de $\vec{V}$ et $\vec{V}'$. Les coefficients β'_1 et β'_2 des termes en τ^2, τ^3 dans le développement de $\vec{A_1 A'}$ ne sont pas égaux obligatoirement à ceux qui résulteraient de l'intégration par rapport au temps de transit du développement du vecteur $\vec{V}'$.

Selon le degré d'approximation de la construction élémentaire utilisée, on aura des vecteurs $\vec{\gamma}'_1, \vec{\gamma}'_2, \dots, \vec{\beta}'_1, \vec{\beta}'_2, \dots$ qui différeront plus ou moins des vecteurs exacts $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n, \dots$. Plus la différence sera faible, meilleure sera l'approximation. Ce point de vue conduit à une classification des différentes méthodes possibles. Si $\vec{\gamma}_1 \neq \vec{\beta}'_1$, l'erreur sur $\vec{A_1 A}$ sera du

2^e ordre en τ . Si $\vec{\gamma}_1 = \vec{\beta}'_1$ avec $\vec{\gamma}_2 \neq \vec{\beta}'_2$, elle sera du 3^e ordre, etc.

Si $\vec{\gamma}'_2 = \vec{\gamma}_2$ avec $\vec{\gamma}'_3 \neq \vec{\gamma}_3$, l'erreur sur la direction de la vitesse sera elle aussi du 3^e ordre.

Tout ce qui précède a trait uniquement à l'erreur théorique.

En réalité cette erreur, si elle était seule, pourrait être rendue aussi petite que l'on voudrait. Il suffirait de prendre tous les ΔU très faibles, en multipliant le nombre des constructions élémentaires. C'est alors qu'interviennent les erreurs graphiques, qui prennent d'autant plus d'importance qu'il y a un plus grand nombre de constructions élémentaires. La précision effective dépend d'un compromis à déterminer entre les deux. Naturellement, plus l'approximation obtenue théoriquement est bonne, mieux on peut se contenter d'un petit nombre de constructions, et par suite plus faible est l'erreur graphique. Du point de vue pratique, une autre considération doit d'ailleurs entrer en jeu : la construction utilisée doit rester suffisamment maniable. C'est à la lumière de ces principes que nous discuterons les mérites de diverses méthodes.

Dans tout ce qui suit nous appellerons champ électrique le vecteur $\vec{\text{grad}} U$ et non $-\vec{\text{grad}} U$, comme cela se fait d'ordinaire. Notre définition a l'avantage de mettre la force agissant sur un électron sous la forme $+eE$.

L'électron est alors sollicité dans le sens du champ.

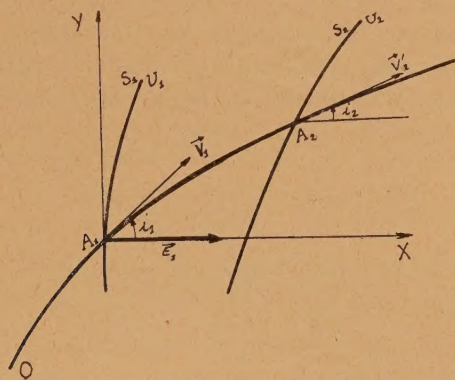


FIG. 1.

Nous allons considérer un électron (masse m , charge $-e$) abandonné sans vitesse initiale en un point O dont le potentiel sera pris pour origine, et nous allons étudier diverses constructions élémentaires permettant de passer du point A_1 où l'électron coupe l'équipotentielle S_1 de potentiel U_1 , au point A_2 où il coupe l'équipotentielle S_2 de potentiel U_2 . Nous posons $\Delta U = U_2 - U_1$ (ΔU est un infiniment petit du 1^{er} ordre). Nous désignerons par A_1Y et A_1X la tangente et la normale en A_1 à S_1 , par i_1 et i_2 les angles des vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ avec A_1X . En A_1 le champ électrique $\vec{E}_1$ sera dirigé suivant A_1X (fig. 1).

Nous supposons dans tout ce qui suit que le champ électrique et la vitesse de l'électron ne s'annulent pas et que l'angle d'incidence est inférieur à $\pi/2$. Dans ces conditions, la différence de potentiel ΔU entre deux points voisins pris sur une même trajectoire est toujours un infiniment petit du même ordre que la distance de ces deux points.

A. — MÉTHODES DU 2^e ORDRE. — La caractéristique essentielle de toutes ces méthodes est que le résultat d'une construction élémentaire faite à partir d'un point A_1 et d'une vitesse $\vec{V}_1$ supposés exactement connus fournit un point A'_2 et une vitesse $\vec{V}'_2$ exacts au 2^e ordre près en ΔU . Diverses méthodes ont été proposées pour passer de A_1 en A'_2 . Pour la détermination de la vitesse $\vec{V}'_2$ toutes ces méthodes ont une propriété commune : on remplace le champ exact $\vec{E}_A$ au point quelconque A situé entre S_1 et S_2 par un champ approché et constant $\vec{E}'_A$ tel que $\vec{E}_A - \vec{E}'_A$ soit un infiniment petit du même ordre que la différence de potentiel ΔU entre S_2 et S_1 .

1^{re} Méthode. — On passe de A_1 à A'_2 en remplaçant la trajectoire par sa tangente en A_1 selon la relation :

$$\vec{A_1A'_2} = \vec{V}_1\tau.$$

La direction de la vitesse serait obtenue si nous connaissions le vecteur $\vec{\gamma}_1\tau = \frac{e}{m}\vec{E}_1\tau$, car la relation (3) deviendrait :

$$\vec{V}'_2 = \vec{V}_1 + \vec{\gamma}_1\tau.$$

Cette relation projetée sur A_1Y permet de définir facilement, à partir des données, la direction de la vitesse $\vec{V}'_2$, sa grandeur étant définie par application du théorème des forces vives.

Comme nous désirons avoir $\vec{V}'_2$ au 2^e ordre près, nous utiliserons une valeur de $\vec{E}_1$ approchée au 1^{er} ordre et une valeur de τ exacte au 2^e ordre près.

Supposons que nous développons le potentiel en série de Taylor au voisinage du point A_1 , les axes étant la tangente A_1Y et la normale A_1X en A_1 à S_1 :

$$(5) \quad U = U_1 + E_1x + ax^2 + bxy + cy^2 + \dots$$

Si N (fig. 2) est le point où la surface S_2 coupe A_1X , il nous sera commode de définir le champ $\vec{E}'_1$ par :

$$\vec{E}'_1 = \frac{\Delta U}{A_1N} = \frac{U_2 - U_1}{A_1N};$$

$\vec{E}'_1$ ne diffère de $\vec{E}_1$ que d'un infiniment petit. En effet, la relation (5) appliquée au point N donne :

$$\Delta U = E_1.A_1N + a.A_1N^2 + \dots,$$

d'où :

$$(6) \quad \vec{E}'_1 = \vec{E}_1 + a \cdot A_1 N + \dots$$

Le champ $\vec{E}'_1$ étant ainsi fixé, le temps de transit τ'' mis par l'électron pour passer de la vitesse $\vec{V}_1$ à la vitesse $\vec{V}'_2$ dans le champ $\vec{E}'_1$ est parfaitement déterminé. Vérifions qu'il ne diffère de τ que d'un infiniment petit du 2^e ordre.

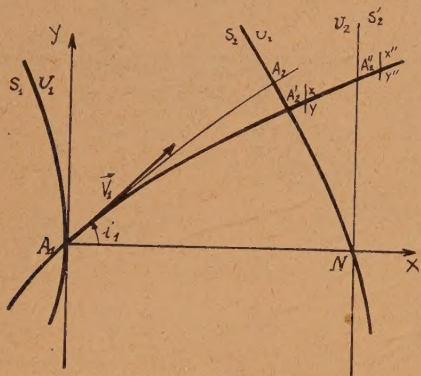


FIG. 2.

Soient : S'_2 le plan passant par N et normal à A_1X , que nous supposons au potentiel U_2 (fig. 2) ; x'' et y'' les coordonnées du point A''_2 de S'_2 où aboutit la trajectoire de l'électron dans le champ $\vec{E}'_1$;

x et y les coordonnées du point A'_2 .

On a :

$$U_2 - U_1 = E'_1 x'' = E_1 x + dx^2 + bxy + Cy^2 + \dots$$

Comme $\vec{E}_1$ et $\vec{E}'_1$ sont infiniment voisins, nous voyons que x et x'' ne diffèrent que d'un infiniment petit du 2^e ordre en ΔU . Il en est de même pour les temps de transit τ et τ'' et pour les potentiels des points A_2 et A''_2 dans la distribution exacte.

La considération du plan tangent à S_1 en A_1 et de la surface S'_2 permet donc d'obtenir la vitesse $\vec{V}_2$ au 2^e ordre près. Sa longueur est définie par application du théorème des forces vives :

$$(7) \quad \frac{1}{2} m V_2^2 = e U_2.$$

On obtient sa direction en écrivant que la projection de la vitesse sur la normale A_1Y à la direction du champ $\vec{E}_1$ est constante :

$$(8) \quad V'_2 \sin i'_2 = V_1 \sin i_1,$$

d'où :

$$(9) \quad \sin i'_2 = \sqrt{\frac{U_1}{U_2}} \sin i_1.$$

Les considérations qui précèdent conduisent à la construction suivante.

Construction graphique. — On trace deux cercles concentriques C_1 et C_2 de rayons proportionnels respectivement à $\sqrt{U_1}$ et $\sqrt{U_2}$ (fig. 3). A partir

d'un diamètre OX' que pour la commodité du langage nous supposons être parallèle à la normale A_1X , on porte l'angle $\widehat{X'OB_1} = i_1$. OB_1 est alors proportionnel à $\vec{V}_1$.

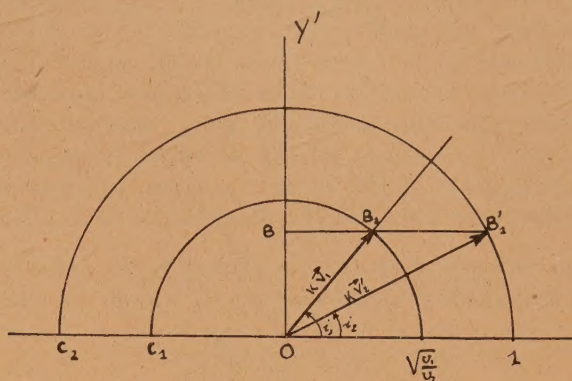


FIG. 3.

On mène par B_1 la parallèle à OX' (qui coupe en B le diamètre perpendiculaire à OX' menée par O) et on joint au point O son point d'intersection B'_1 avec C_2 .

D'après cette construction $\vec{OB}'_1$ est alors proportionnel à $\vec{V}'_2$, dont la direction est ainsi définie. Pour poursuivre la construction, il suffit de mener, par l'intersection de la direction de $\vec{V}_1$ avec S_2 , la parallèle au vecteur $\vec{V}'_2$.

Erreurs graphiques. — L'erreur graphique sur la direction de la vitesse est liée à l'erreur $\delta B'_1$ sur la détermination du point B'_1 . Il nous sera commode de décomposer l'erreur maximum $\delta B'_1$ en trois termes, qui majoreront respectivement trois erreurs d'origines diverses dont la composition donne $\delta B'_1$. Ces trois erreurs composantes sont :

1^o Une erreur due à l'imprécision $\Delta\beta$ sur la direction de la normale. Elle est majorée par $\overline{B_1 B'_1} \cdot \Delta\beta$.

2^o Une erreur due à l'erreur sur le parallélisme de $B_1 B'_1$ et de OX' . Elle sera majorée par une quantité que nous représenterons par $\delta B_1 B'_1$.

3^o Toutes les autres erreurs graphiques intervenant sur la position de B_1 , nous supposons leur ensemble majoré par δB_1 , d'où :

$$\delta B'_1 = \overline{B_1 B'_1} \cdot \Delta\beta + \delta B_1 + \delta \overline{B_1 B'_1}$$

et l'erreur angulaire sur la direction de la vitesse :

$$(10) \quad \delta i'_2 = \frac{\overline{B_1 B'_1}}{\overline{OB'_1}} \Delta\beta + \frac{\delta B_1 + \delta \overline{B_1 B'_1}}{\overline{OB'_1}}.$$

Ces termes dépendent essentiellement des moyens utilisés pour faire la construction. Nous les laissons sous leur forme littérale, ce qui permettra de comparer les différentes méthodes graphiques entre elles, toutes choses égales par ailleurs.

2^e Méthode. — Cette méthode est en quelque sorte suggérée par une analogie optique du problème

étudié. On sait que la trajectoire d'un électron, dans un champ dérivant d'un potentiel, est analogue à la marche d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice $n = \sqrt{U}$ variant de façon continue. On peut dire que ce rayon lumineux subit une infinité de réfractions infiniment voisines les unes des autres. On aura une description approchée en ne faisant intervenir qu'un nombre très grand, mais fini, de réfractions successives. Nous allons donc chercher à définir pour chaque tranche $S_i S_{i+1}$ une réfraction unique, entre deux milieux d'indices homogènes, équivalente à l'effet de la variation continue de l'indice dans cette tranche. Pour cela nous supposons qu'entre S_i et S_{i+1} le champ $\vec{E}$ est uniforme. La trajectoire d'un électron est un arc de parabole.

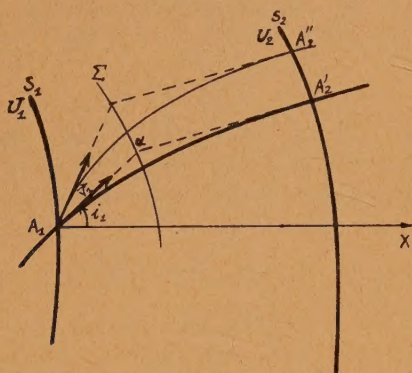


FIG. 4.

La figure 4 montre, pour diverses valeurs de l'angle d'incidence i_1 , les paraboles correspondantes et les points A'_2 , A''_2 où les trajectoires paraboliques coupent l'équipotentielle S_2 . S'il existe une surface Σ telle que l'on puisse parler d'une réfraction unique sur Σ , en un point α , faisant passer du rayon rectiligne support de $\vec{V}_1$ au rayon rectiligne support de $\vec{V}_2$, sa méridienne sera certainement le lieu des points α et on aura aisément les équations paramétriques de Σ en exprimant α en fonction de i_1 . Cependant rien ne prouve que la réfraction en α obéisse à une loi analogue à la loi de Descartes. Si i_1 est petit, c'est-à-dire si l'on ne fait intervenir que le voisinage de A_1X , il en est bien ainsi et on peut, à proprement parler, faire intervenir une réfraction sur Σ , les deux indices étant $\sqrt{U_1}$ et $\sqrt{U_2}$. Nous montrerons que la position de Σ au voisinage de A_1X est définie par la condition suivante : Σ se confond avec l'équipotentielle $U = \sqrt{U_1} \cdot \sqrt{U_2}$, ce qui, étant donné la petitesse de ΔU , donne approximativement : $U = \frac{U_1 + U_2}{2}$.

D'après les résultats de la première méthode, nous pouvons remarquer que si la direction du champ $\vec{E}_1$ est connue, la direction de la vitesse $\vec{V}'_2$ sera définie au second ordre près, si la différence entre le potentiel du point A_2 , dans la distribution donnée et la distribution approchée, est infiniment petite du

second ordre ($\vec{V}_1$ étant connu exactement et l'erreur sur la longueur de $\gamma_1 \tau$ étant du second ordre). Pour simplifier l'exposé de la deuxième méthode, nous supposons que la surface plane S'_2 , au potentiel U_2 dans la distribution approchée, coupe la surface S_2 au point A'_2 (fig. 5).

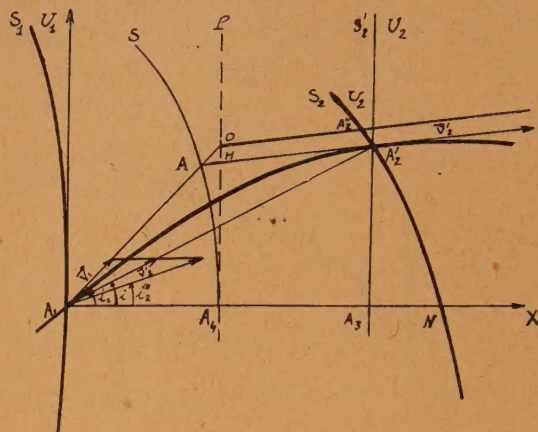


FIG. 5.

Soit i l'angle de $A_1 A'_2$ avec $A_1 X$ et A_3 la projection de A'_2 sur $A_1 X$ (fig. 5). Il résulte des propriétés du mouvement parabolique que :

$$(11) \quad \vec{A_1 A'_2} = k \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}'_2}{2}.$$

On en déduit :

$$(12) \quad 2 \cotg i = \cotg i_1 + \cotg i'_2.$$

Dans le triangle $A_1 A A'_2$, nous avons :

$$(13) \quad \frac{A_1 A}{\sin(i - i'_2)} = \frac{A_1 A'_2}{\sin(i_1 - i'_2)}$$

et

$$(14) \quad x = A_1 A \cos i_1, \quad y = A_1 A \sin i_1,$$

où x et y sont les coordonnées du point courant, sur la méridienne de la surface de réfraction S supposée existante.

D'où l'on tire, en posant $\Delta x = A_1 A_3$:

$$(15) \quad x = \Delta x \frac{1 - \tg i \cdot \cotg i'_2}{1 - \tg i_1 \cdot \cotg i'_2},$$

$$(16) \quad y = \Delta x \cdot \tg i_1 \frac{1 - \tg i \cdot \cotg i'_2}{1 - \tg i_1 \cdot \cotg i'_2},$$

ou en tenant compte des relations (7), (9), (12) et en

posant $n = \sqrt{\frac{U_1}{U_2}}$:

$$(17) \quad x = \Delta x \frac{n \cos i_1}{n \cos i_1 + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1}},$$

$$(18) \quad y = \Delta x \frac{n \sin i_1}{n \cos i_1 + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1}}$$

Dans le cas où i_1 est petit, on voit que le lieu du point A défini paramétriquement par les relations (17), (18) est une courbe perpendiculaire à $A_1 X$ en A_4 . L'abscisse du point d'intersection A_4 de la courbe avec $A_1 X$ est :

$$(19) \quad x = \Delta x \frac{n}{n + 1} \simeq \frac{\Delta x}{2}.$$

ce qui résout le problème géométrique. Cependant, si on n'impose pas d'autres conditions aux Ψ , on ne réalisera pas l'égalité des dérivées $d\psi/dt$ en A_1 pour $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ et on aura des valeurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}'_2$ différentes.

La distinction entre le point de vue purement géométrique et le point de vue cinématique va apparaître plus clairement dans ce qui suit.

Considérons les équations intrinsèques du mouvement :

$$(20) \quad m \frac{dV}{dt} = F_t,$$

$$(21) \quad m \frac{V^2}{R} = F_n.$$

Si on veut, se plaçant uniquement au point de vue géométrique, réaliser un contact du 3^e ordre entre Γ et Γ' , il faut que ces deux courbes aient en A_1 même tangente et même rayon de courbure, ce qui a lieu si dans le champ $\Psi_{(M)}$ la composante normale F_n a la même valeur que dans le champ réel.

On aura une approximation de la vitesse au 2^e ordre si la dérivée $\frac{d\psi}{dt}$ est respectée, c'est-à-dire si dans le

champ $\Psi_{(M)}$ la composante F_t est la même que dans le champ réel. En définitive, si on veut représenter au 1^{er} ordre près les propriétés géométriques et au 2^e ordre les propriétés cinématiques, il faut que le champ dérivant de $\Psi_{(M)}$ se raccorde avec le champ réel en A_1 . Si, comme nous le suggérons précédemment, le potentiel $\Psi_{(M)}$ est créé par une masse ponctuelle, celle-ci sera nécessairement placée sur la droite A_1X , support du champ réel en A_1 . Naturellement on peut faire sur F_t et F_n des erreurs du 1^{er} ordre. On pourra alors prendre pour valeur du champ la valeur $\frac{U_2 - U_1}{A_1N}$ (fig. 2).

Si on se donne arbitrairement sur A_1X la position d'une masse (positive ou négative) m chargée de créer $\Psi_{(M)}$, on pourra toujours calculer une valeur de m qui crée en A_1 un champ égal à $\frac{U_2 - U_1}{A_1N}$.

Quelle que soit la position de la masse, la surface $\Psi_{(M)} = U_2$ dans la distribution du potentiel approchée sera une sphère normale en N à A_1X . Selon le signe et la position de m , on aura un mouvement elliptique ou hyperbolique.

Le cas où m est rejeté à l'infini et où le champ approché a la valeur constante $\frac{U_2 - U_1}{A_1N}$ correspond à une trajectoire Γ' parabolique. La surface $\Psi_{(M)} = U_2$ est alors plane.

Méthode du cercle osculateur. — Cette méthode bien connue consiste à remplacer la courbe Γ par son cercle osculateur au point A_1 . On obtient ainsi directement le point A'_2 sans passer par l'intermédiaire de la vitesse $\vec{V}'_2$. On déduit celle-ci du tracé en menant en A'_2 la perpendiculaire à la normale en A'_2 .

On calcule le rayon de courbure $\mathcal{R}$ à partir d'une des équations intrinsèques du mouvement.

Si, en plus des notations utilisées jusqu'à maintenant, nous désignons (fig. 8) par

O — le centre de courbure du cercle osculateur Γ' à la courbe Γ ,

$\mathcal{R}$ — le rayon de courbure de ce cercle,

A_4 — l'intersection de la normale en N , à A_1X , avec OA_1 , nous avons :

$$(22) \quad \mathcal{R} = \frac{2U_1}{\Delta U} \overline{A_1A_4}.$$

Dans certains cas, on pourra diminuer l'erreur du 2^e ordre en remplaçant $2U_1$ par $U_1 + U_2$.

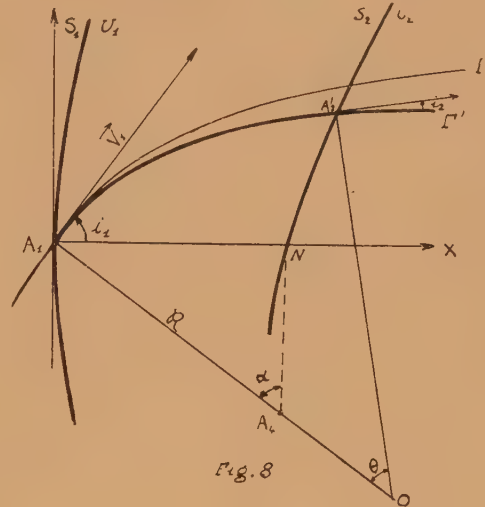


Fig. 8.

Construction graphique. — On déduit de ce qui précède la construction suivante (fig. 8). De N on mène la perpendiculaire à A_1X , qui coupe en A_4 la normale en A_1 à la trajectoire. On porte à partir de A_1 et dans le sens de la composante positive du champ, sur A_1A_4 , une longueur R définie par la relation (22), ce qui définit le centre O du cercle osculateur. On trace ensuite un arc de cercle de rayon $\mathcal{R}$ et de centre O , dont l'intersection avec S_2 donne le point A'_2 . On obtient ainsi la nouvelle normale à la trajectoire en A'_2 en joignant OA'_2 , ce qui permet de poursuivre la construction.

Précision graphique. — Nous supposons connue exactement la direction du rayon de courbure en A_1 . L'erreur graphique principale provient de la détermination de $\mathcal{R} \cdot U_1$ et ΔU étant connus exactement, on a :

$$\frac{\Delta \mathcal{R}}{\mathcal{R}} = \frac{\Delta(A_1A_4)}{A_1A_4}.$$

La distance A_1A_4 est obtenue par la détermination de deux normales. Si $\Delta\beta$ est l'erreur sur la détermination de la normale et α l'angle $\widehat{A_1A_4N}$, on trouve que :

$$\frac{\Delta(A_1A_4)}{A_1A_4} = 2 \frac{\Delta\beta}{\alpha},$$

d'où :

$$\frac{\Delta \mathcal{R}}{\mathcal{R}} = 2 \frac{\Delta\beta}{\alpha}.$$

Il en résulte pour la position du point A'_2 une erreur

$$\Delta X' = \frac{1}{2} \theta^2 \Delta R$$

et pour la direction de la vitesse :

$$\Delta i_2 = 2 \frac{\theta}{\alpha} \Delta \beta + \Delta \beta.$$

Méthode de l'hyperbole ou de l'ellipse osculatrice. —

D'après ce que nous avons vu dans les généralités sur les courbes osculatrices, nous pouvons remplacer, pour la détermination de la vitesse $\vec{V}_2$, la surface S_2 par une surface sphérique S'_2 qui passe par N et dont le centre se trouve sur A_1X (fig. 9). Cela correspond physiquement à une distribution de potentiels produite par une charge ponctuelle q placée au centre F de la sphère.

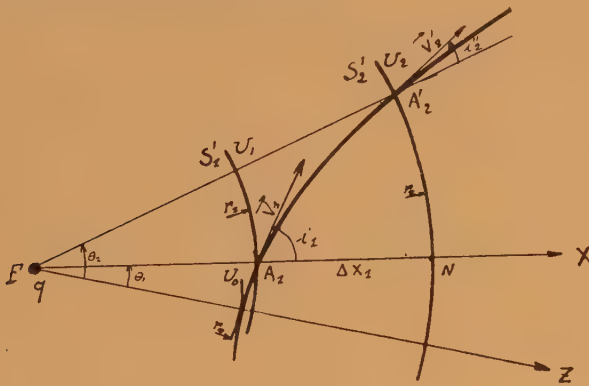


FIG. 9.

Le champ créé par cette charge q est $\vec{E}' = q/r^2$. La valeur de q est fixée, si l'on se donne la valeur du champ $\vec{E}'_1$ en un point dont la distance à F est r_1 , ce qui est aussi réalisé si l'on se donne les potentiels de deux surfaces concentriques de centre F et de rayons connus.

Nous remplacerons donc la distribution du champ donnée par une distribution en q/r^2 , ce qui nous définira la vitesse $\vec{V}_2$ de l'électron au 2^e ordre près. Pour obtenir graphiquement le point A'_2 , nous serons d'abord conduits à déterminer l'axe de l'hyperbole (ou de l'ellipse) osculatrice choisie, puis à chercher l'intersection de cette hyperbole (ou ellipse) avec la surface S_2 .

L'erreur $A_2A'_2$ sera alors du 3^e ordre en ΔU .

Soient, en plus des notations habituelles (fig. 9) : r_2 le rayon de la sphère S'_2 de centre F prise au potentiel U_2 ,

ΔX_1 la distance A_1N ,

$r_1 = r_2 - \Delta X_1$ le rayon de la sphère S'_1 de centre F et de potentiel U_1 ,

i_1, i'_1 les angles avec le rayon vecteur des vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}'_1$, appliquées respectivement en A_1 et A'_1 ,

θ_1 et θ_2 les angles des rayons vecteurs FA_1 et FA'_2 avec l'axe FZ de l'hyperbole (ou de l'ellipse)

pris comme origine des angles en coordonnées polaires,

r_0 et U_0 le rayon et le potentiel de la sphère du faisceau tangente au sommet de l'hyperbole (ou de l'ellipse).

L'application de la loi des aires donne :

$$(23) \quad \sqrt{U_1} r_1 \sin i_1 = \sqrt{U_2} r_2 \sin i'_2,$$

d'où l'angle i'_2 .

La détermination du point A'_2 suppose connu l'angle θ_2 que fait le rayon vecteur OA'_2 avec l'axe de l'hyperbole. Pour cela nous déterminerons d'abord le rayon r_0 .

L'application de la loi des aires donne :

$$(24) \quad U_0 r_0^2 = U_1 r_1^2 \sin^2 i_1 = U r^2 \sin^2 i,$$

en désignant par U le potentiel en un point dont la distance au foyer répulsif (ou attractif) est r .

D'autre part, la distribution du champ étant en $1/r$, on a :

$$(25) \quad U = A + \frac{B}{r},$$

où les constantes A et B sont déterminées à partir de U_1, U_2, r_1, r_2 .

En reportant dans (24) on a :

$$(26) \quad Ar_0^2 + Br_0 = U_1 r_1^2 \sin^2 i_1,$$

ce qui définit r_0 .

Nous pouvons résoudre graphiquement cette équation de la façon suivante. Posons $X = 1/r$ et considérons les fonctions

$$(27) \quad y = \frac{U}{U_1 r_1^2 \sin^2 i_1},$$

$$(28) \quad Z = \frac{1}{r^2} = X^2.$$

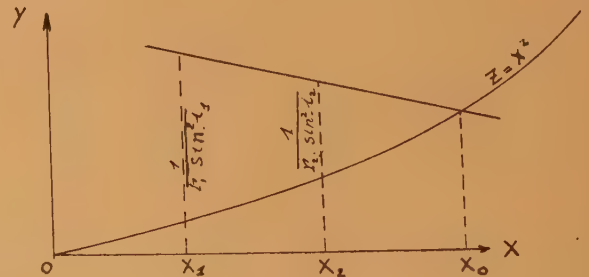


FIG. 10.

Cette dernière peut être tracée une fois pour toutes ; quant à la droite $y = f(X)$, il suffit d'en déterminer deux points. Si nous posons $X_1 = 1/r_1$ et $X_2 = 1/r_2$, nous avons alors :

$$y_1 = \frac{1}{r_1^2 \sin^2 i_1} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1}{r_2^2 \sin^2 i_2} \quad (\text{fig. 10}).$$

L'intersection de ces deux courbes donne $X_0 = 1/r_0$, d'où r_0 .

L'angle θ_1 est alors défini à partir de l'équation de l'hyperbole (ou de l'ellipse) par la relation :

$$(29) \quad r_1 \operatorname{tg} i_1 \sin \theta_1 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) = 1 - \cos \theta_1,$$

que nous pouvons résoudre aussi graphiquement.

L'équation (29) peut se mettre sous la forme :

$$(30) \quad \left[\frac{1}{r_1} - \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \operatorname{tg} i_1 \sin \theta_1 \right] r_1 = \cos \theta_1.$$

On peut aussi tracer une fois pour toutes la courbe $\cos \theta = f(\sin \theta)$, qui est un cercle de rayon 1. Puis on considère la courbe (fig. 11) ;

$$(31) \quad y = 1 - \left(\frac{r_1}{r_0} - 1 \right) \operatorname{tg} i_1 \sin \theta$$

en fonction de $\sin \theta$. Cette courbe est une droite, dont il est facile de déterminer deux points. En effet, pour $\sin \theta = 0$, $y = 1$ et pour $\sin \theta = 1$, $y = 1 - \left(\frac{r_1}{r_0} - 1 \right) \operatorname{tg} i_1$.

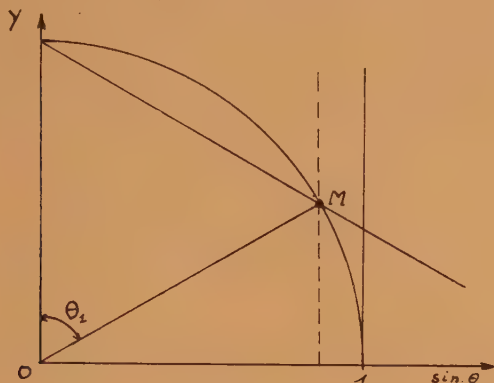


FIG. 11.

L'intersection de cette droite avec le cercle donne un point M tel que l'angle de OM avec OY est l'angle θ_1 cherché. Il est ensuite facile de définir le point A'_2 . En effet, des relations de l'hyperbole, on déduit :

$$(32) \quad \frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i_2} = \frac{r_2 \sin \theta_2}{r_1 \sin \theta_1} = \frac{A'_2 B_2}{A_1 B_1}.$$

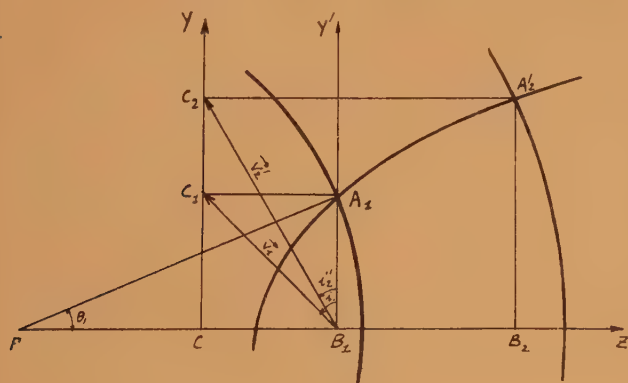


FIG. 12.

Construction graphique. — De A_1 on abaisse la perpendiculaire sur l'axe FZ de la conique, qui le coupe en B_1 (fig. 12). La direction positive étant prise de B_1 vers A_1 , on porte l'angle i_1 à partir de $B_1 Y'$ et par A_1 on mène la perpendiculaire à OY' qui coupe la direction de $\vec{V}_1$ en C_1 . Par C_1 on mène la parallèle à $B_1 Y'$, qui coupe en C_2 la direction de $\vec{V}'_2$ définie par rapport à $B_1 Y'$ (23). De la relation (32) il résulte que $CC_2 = A'_2 B_2$ et qu'il suffit de mener par C_2 la normale à $B_1 Y'$, son intersection

avec S'_2 donnant le point A'_2 . La vitesse $\vec{V}'_2$ en A'_2 est obtenue en portant à partir de FA'_2 et dans une direction convenable l'angle i'_2 déterminé précédemment (23).

Méthode de la parabole osculatrice. — Dans cette méthode, comme dans celle du 2^e ordre, nous remplaçons la distribution donnée par une distribution correspondant à un champ constant, celui-ci étant déterminé de telle sorte que la trajectoire correspondante donne la vitesse $\vec{V}_2$ au 2^e ordre près. Les vitesses sont obtenues exactement de la même façon, mais à la différence des méthodes du 2^e ordre, au lieu de prendre $\vec{A}_1 A'_2 = \vec{V}_1 \tau$, nous définirons $\vec{A}_1 A'_2$ par la relation :

$$\vec{A}_1 A'_2 = \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}'_2}{2},$$

ce qui d'après les propriétés du mouvement parabolique nous donne le point A'_2 de la parabole osculatrice à la courbe Γ dont la direction de l'axe est $A_1 X$.

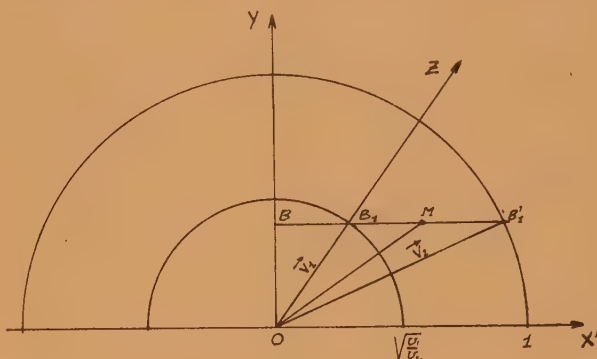


FIG. 13.

Construction graphique. — La construction décrite dans la première méthode du 2^e ordre pour la détermination de la vitesse $\vec{V}'_2$ se complète de la façon suivante pour l'obtention de la corde $\vec{A}_1 A'_2$ (fig. 13).

Soit M le milieu de $B_1 B'_1$. OM est proportionnel à $\frac{\vec{V}_1 + \vec{V}'_2}{2}$, donc à $\vec{A}_1 A'_2$. On mène par A_1 la parallèle au vecteur OM dont l'intersection avec S_2 donne le point A'_2 .

Erreur graphique. — Les erreurs graphiques sur la direction de la vitesse ont déjà été évaluées lors de l'examen des méthodes du 1^{er} ordre, aussi n'y reviendrons-nous pas.

Rappelons que

$$(10) \quad \delta i'_2 = \frac{B_1 B'_1}{OB_1} \Delta \beta + \frac{\delta B_1 + \delta \beta_1 B'_1}{OB_1}.$$

L'erreur sur la position du point A'_2 correspond pratiquement à l'erreur de pointé sur A'_2 , car la distance $A_1 A'_2$ est généralement très petite par rapport aux distances définissant sa direction.

Comparaison des différentes méthodes du 3^e ordre entre elles. — Nous comparerons les différentes méthodes, tant du point de vue de la commodité des constructions auxquelles elles conduisent, que du point de vue des erreurs graphiques ; et nous examinerons, du point de vue théorique, celle qui conduit au plus petit nombre de constructions pour une distribution du potentiel donnée et une même erreur théorique totale.

Comparaison, du point de vue pratique, des méthodes du 3^e ordre. — La méthode du cercle osculateur est peu pratique, car elle nécessite des tracés d'arcs de cercle de grands rayons. En effet, les rayons de courbure des trajectoires dans les structures électroniques sont facilement supérieurs à 2 cm. Si nous agrandissons 20 fois la structure étudiée, pour déterminer le potentiel à la cuve électrolytique avec une bonne précision, le rayon R deviendra supérieur à 40 cm.

La méthode de l'hyperbole ou de l'ellipse osculatrice est aussi peu pratique, car elle nécessite la résolution graphique de deux équations.

Au contraire, la méthode de la parabole osculatrice ne fait intervenir que le rapport des rayons des cercles C_1 et C_2 . Nous pourrions choisir la longueur d'un des rayons, indépendamment de l'échelle adoptée pour le tracé des surfaces équipotentielle à la cuve électrolytique. De plus, nous n'avons qu'à repérer des directions, ce qui se fait très facilement.

Comparaison, du point de vue graphique, des méthodes du 3^e ordre. — Du point de vue des erreurs graphiques, la méthode de l'hyperbole est nécessairement la moins précise, puisqu'elle nécessite la résolution graphique de deux équations. Si nous comparons les expressions de l'erreur graphique $\delta i'_2$ (sur la direction de $\vec{V}'_2$) correspondant à la construction de la parabole osculatrice ou du cercle osculateur, nous voyons que la méthode de la parabole est plus précise, si l'angle d'incidence i_1 est petit. En effet, dans le cas du cercle osculateur, nous avons $\theta \simeq \alpha$ et $\delta i_2 = 3\Delta\beta$, alors que pour la parabole osculatrice, si nous prenons $OB_1 = 20$ cm et si nous admettons que $\Delta\beta \simeq 0,005$ radian, ce qui correspond à une erreur angulaire de quelques minutes, nous avons :

$$\delta i'_2 \simeq \Delta\beta.$$

Si l'angle d'incidence est grand, les erreurs graphiques deviennent du même ordre.

Conditions d'emploi des diverses méthodes du 3^e ordre. — Il est évident que l'erreur totale, somme des erreurs théoriques T_1 et graphiques G_1 commises dans chacune des constructions élémentaires, sera d'autant plus petite que pour une même erreur théorique T_1 l'erreur graphique G_1 sera plus petite, ce qui peut s'obtenir en particulier par une réduction du nombre des constructions graphiques.

La construction employée sera d'autant meilleure

que l'approximation faite sur le champ serrera de plus près la distribution donnée ; aussi allons-nous rappeler les différentes distributions de potentiels qui correspondent à chacune des coniques osculatrices.

La trajectoire circulaire correspond à la distribution de potentiel créée par une charge ponctuelle, les conditions initiales étant telles que l'électron se déplace sur un grand cercle d'une des surfaces équipotentielle. L'angle d'incidence i_1 est égal à $\pi/2$. Le champ est en K/r^2 .

La trajectoire hyperbolique (ou elliptique) correspond également à une distribution de potentiel créée par une charge ponctuelle, mais cette fois l'électron ne se déplace plus obligatoirement sur un grand cercle. L'angle d'incidence est quelconque. Le champ est en K/r^2 .

Le potentiel U au voisinage d'un point A_1 pourra dans ce cas s'exprimer par le développement en fonction de x et de y , suivant :

$$U = U_1 + E_1 x - \frac{E_1}{R_1} x^2 + \frac{E_1}{2R_1} y^2 + \dots,$$

où E_1 et R_1 sont le champ et le rayon de la surface équipotentielle en A_1 .

La trajectoire parabolique peut être considérée comme une limite de la précédente, la charge ponctuelle s'éloignant à l'infini. Les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles et le champ est constant.

Le potentiel U correspondant à la trajectoire parabolique considérée précédemment sera :

$$U = U_0 + E'_1 x.$$

Dans presque tous les problèmes de canons à électrons où l'on suppose les électrons émis par la cathode sans vitesse initiale, l'angle d'incidence i_1 est bien inférieur à 45° . Les conditions correspondant à la trajectoire circulaire sont donc loin d'être réalisées. Au contraire, si nous prenons par exemple une triode dont les différents éléments (cathode, grille, plaque) sont dans des plans parallèles, nous aurons entre les électrodes un champ presque uniforme et la parabole osculatrice donnera une très bonne approximation.

Si les électrodes, au lieu d'être planes, étaient sphériques (canon d'un oscillographe avec cathode concave), nous pourrions profiter de la latitude laissée sur la position de la charge ponctuelle (répulsive ou attractive) dans l'approximation hyperbolique, pour faire coïncider les termes du 2^e ordre en x^2 et y^2 de la distribution du potentiel. On choisit pour rayon de la sphère S'_1 de potentiel U_1 passant par A_1 le rayon de courbure de la surface équipotentielle S_1 passant par A_1 . De telle sorte que les deux surfaces S'_1 et S_1 sont osculatrice en A_1 .

Nous pourrions alors diminuer le nombre des constructions pour aller du point A au point A_n et augmenter la précision du tracé.

Nous pouvons remarquer que dans tous les cas où la distribution de potentiel donnée est très proche

de celle qui correspond à une des coniques précédemment envisagées, l'approximation qu'on obtient en remplaçant la trajectoire par cette conique est bien supérieure à celle qui correspondrait à l'utilisation de toutes autres coniques ou même à l'emploi de méthodes d'ordre supérieur. Dans ce cas, le nombre des constructions élémentaires est considérablement réduit, et il en est de même pour l'erreur graphique.

Méthode de la courbe surosculatrice. — Dans ce qui précède, nous avons pu trouver une distribution de potentiel approchée $\Psi_{(M)}$ définissant, lors d'une construction élémentaire, une courbe osculatrice à la trajectoire réelle. Nous pourrions définir également une courbe surosculatrice.

Nous avons vu tout à fait au début que nous pouvions exprimer la vitesse $\vec{V}_2$ en un point de la trajectoire et la position de ce point sous forme de développements par rapport au temps de transit :

$$(1) \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{\gamma}_1 \tau + \vec{\gamma}_2 \tau^2 + \vec{\gamma}_3 \tau^3 + \dots$$

$$(2) \quad \overrightarrow{A_1 A_2} = \vec{V}_1 \tau + \frac{\vec{\gamma}_1}{2} \tau^2 + \frac{\vec{\gamma}_2}{3} \tau^3 + \frac{\vec{\gamma}_3}{4} \tau^4 + \dots$$

Nous obtiendrons une courbe surosculatrice si lors d'une construction élémentaire nous obtenons les vecteurs suivants :

$$(33) \quad \vec{V}'_2 = \vec{V}_1 + \vec{\gamma}_1 \tau + \vec{\gamma}_2 \tau^2 + \vec{\gamma}'_3 \tau^3 + \dots$$

$$(34) \quad \overrightarrow{A_1 A'_2} = \vec{V}_1 \tau + \frac{\vec{\gamma}_1}{2} \tau^2 + \frac{\vec{\gamma}_2}{3} \tau^3 + \frac{\vec{\gamma}''_3}{4} \tau^4 + \dots$$

$$(35) \quad \overrightarrow{A_1 A'_2} = \tau \left[\vec{V}_1 + \frac{\vec{\gamma}_1}{2} \tau + \frac{\vec{\gamma}_2}{3} \tau^2 + \dots \right]$$

Il en résulte que la longueur de $\vec{V}'_2$ ne diffère que d'un infiniment petit du 3^e ordre de celle de $\vec{V}_2$ et que nous pouvons écrire au même degré d'approximation :

$$(36) \quad \frac{1}{2} m V'^2_2 = e U_2.$$

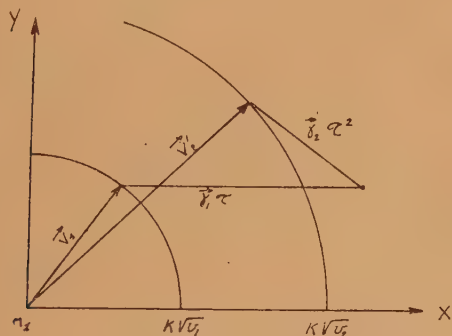


FIG. 14.

Si nous connaissons le vecteur $\vec{\gamma}_2 \tau^2$, nous pouvons définir $\vec{V}'_2$ (fig. 14) en projetant la relation (33) sur la tangente à la surface équipotentielle en A_1 .

On trace deux cercles C_1 et C_2 de rayons proportionnels respectivement à $\sqrt{U_1}$ et $\sqrt{U_2}$. Soient (fig. 15) :

OX une direction parallèle à la normale $A_1 X$,
OY la parallèle à la tangente $A_1 Y$ à la surface équipotentielle S_1 en A_1 ,

B_1 l'extrémité du vecteur $\vec{V}_1$,

OB la projection de $\vec{V}_1$ sur OY,

$\vec{\gamma}_{2Y}$ la projection de $\vec{\gamma}_2$ sur OY.

A partir de B on porte une longueur :

$$BB_4 = \gamma_{2Y} \tau^2 = \Delta V_Y;$$

de B_4 on mène une parallèle à OX qui coupe en B_3 le cercle C_2 . D'après cette construction, $\overrightarrow{OB_3} = \vec{V}'_2$.

Le vecteur $\overrightarrow{A_1 A'_2}$ sera défini par $\overrightarrow{A_1 A'_2} = \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}'_2}{2}$

avec

$$\vec{V}_2'' = \vec{V}_1 + \vec{\gamma}_1 \tau + \frac{2}{3} \vec{\gamma}_2 \tau^2.$$

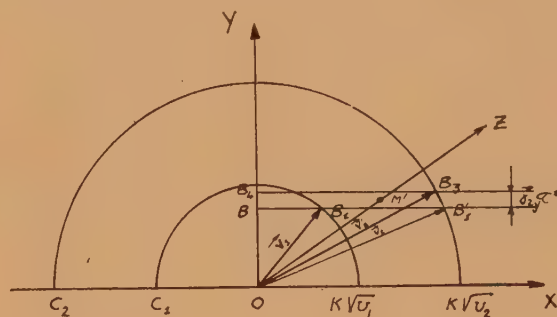


FIG. 15.

La détermination de la vitesse $\vec{V}'_2$ nécessite donc la connaissance de $\vec{\gamma}_2$ et de τ . Nous montrerons que nous pouvons en avoir des valeurs approchées de telle sorte que $\gamma_2 \tau^2$ soit connu au moins au 3^e ordre près, en utilisant des grandeurs déduites de l'application de la méthode de la parabole osculatrice.

Calcul du coefficient $\vec{\gamma}_2$. — Pour l'évaluer, nous représenterons la distribution du potentiel au voisinage de A_1 par un développement en série des coordonnées.

Le choix des axes de la figure 1 permet d'écrire ce développement :

$$(37) \quad U = U_1 + E_1 x + a x^2 + b x y + c y^2 + d x^3 + e x^2 y + f y^2 x + g y^3 + \dots$$

La projection sur les axes $A_1 X$ et $A_1 Y$ des développements de $\overrightarrow{A_1 A_2}$ et $\vec{V}_2$ donne, en désignant par x et y les coordonnées du point A_2 :

$$(38) \quad \begin{aligned} x &= \alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2 + \alpha_3 \tau^3 + \dots \\ y &= \beta_1 \tau + \beta_2 \tau^2 + \beta_3 \tau^3 + \dots \end{aligned}$$

En reportant dans l'équation fondamentale de

la dynamique $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ et en identifiant par rapport au temps, on a :

$$(39) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= V_1 \cos i_1 & \alpha_2 &= \frac{e}{m} \frac{E_1}{2}, \\ \alpha_3 &= \frac{eV_1}{6m} (2a \cos i_1 + b \sin i_1), \\ \beta_1 &= V_1 \sin i_1, & \beta_2 &= 0, \\ \beta_3 &= \frac{eV_1}{6m} (b \cos i_1 + 2c \sin i_1); \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$(40) \quad \begin{aligned} x &= V_1 \cos i_1 \tau + \frac{1}{2} \frac{e}{m} E_1 \tau^2 \\ &+ \frac{eV_1}{6m} (2c \cos i_1 + b \sin i_1) \tau^3 + \dots, \\ y &= V_1 \sin i_1 \tau \\ &+ \frac{eV_1}{6m} (b \cos i_1 + 2c \sin i_1) \tau^3 + \dots \end{aligned}$$

et les composantes de la vitesse :

$$(41) \quad \begin{aligned} V_x &= V_1 \cos i_1 + \frac{e}{m} E_1 \tau \\ &+ \frac{eV_1}{2m} (2a \cos i_1 + b \sin i_1) \tau^2 + \dots \\ V_y &= V_1 \sin i_1 \\ &+ \frac{eV_1}{2m} (b \cos i_1 + 2c \sin i_1) \tau^2 + \dots \end{aligned}$$

Interprétation géométrique des coefficients c, b, a.

A. — *Calcul de c.* — Considérons les expressions du champ déduites de la relation (37) :

$$(42) \quad E_x = E_1 + 2ax + by + 3dx^2 + 2exy + fy^2 + \dots$$

$$(43) \quad E_y = bx + 2cy + ex^2 + 2fxy + 3gy^2 + \dots$$

et plus particulièrement le champ en un point A'''_1 voisin de A_1 sur la surface équipotentielle S_1 . Soit $\Delta\alpha'$ l'angle de ce champ avec A_1X (fig. 16) :

$$\Delta\alpha' = \frac{bx + 2cy + \dots}{E_1 + by + 2ax + \dots}$$

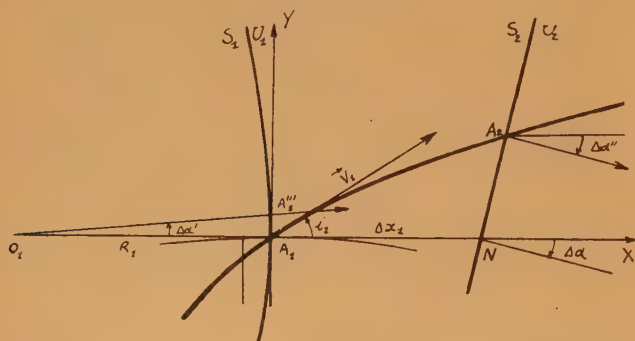


FIG. 16.

Comme A_1Y est la tangente en A_1 à la surface S_1 , x est un infiniment petit du 2^e ordre par rapport à y et $A_1A'''_1$ est un infiniment petit équivalent à y .

Il en résulte que :

$$c = \frac{E_1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha'}{y}.$$

Mais $\Delta\alpha'$ est aussi l'angle des normales en A_1 et A'''_1 à la surface S_1 et la limite du rapport $\Delta\alpha'/y$ est égale au rayon de courbure R_1 en A_1 compté algébriquement à partir du centre de courbure, d'où :

$$(44) \quad c = \frac{E_1}{2R_1}.$$

B. — *Calcul de b.* — Considérons l'angle $\Delta\alpha$ que fait le champ électrique en N avec l'axe A_1X .

Des relations (42) et (43) on tire :

$$\Delta\alpha = \frac{b\Delta x_1 + \dots}{E_1 + 2a\Delta x_1 + \dots},$$

si Δx_1 tend vers 0, $\Delta\alpha$ tend vers 0 et b est défini par :

$$b = E_1 \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta x_1}.$$

Or $\Delta\alpha$ est aussi l'angle des tangentes en A_1 et N aux surfaces S_1 et S_2 , il en résulte que le rapport $\Delta x_1/\Delta\alpha$ quand Δx_1 tend vers zéro, tend vers le rayon de courbure — R'_1 de la ligne de champ en A_1 , compté algébriquement à partir du centre de courbure :

$$(45) \quad b = -\frac{E_1}{R'_1}.$$

C. — *Calcul de a.* — Utilisons le fait que la distribution du potentiel est régie par l'équation de Laplace $\Delta U = 0$.

Le phénomène étant de révolution autour de OZ, le laplacien se réduit en coordonnées cylindriques r, z, θ à :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

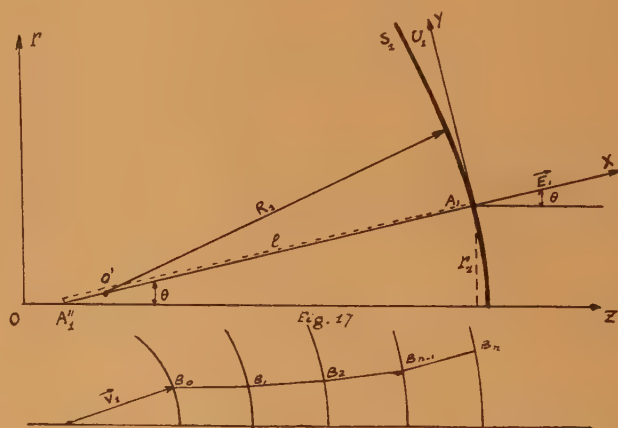


FIG. 17 et 18.

Appliquons cette relation au point A_1 (fig. 17) :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2(a + c);$$

or :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = E_1 \sin \theta, \quad r = r_1,$$

d'où :

$$2(a + c) = -\frac{1}{r_1} E_1 \sin \theta,$$

$$\sin \theta = \frac{r_1}{A_1 A'''_1} = \frac{r_1}{i} \quad (\text{fig. 17}),$$

le point A''_1 étant défini par l'intersection de A_1X avec OZ , d'où :

$$(46) \quad a = -\frac{E_1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{l} \right),$$

où l est compté algébriquement de l'axe vers le point A_1 .

Ce qui donne en reportant les relations (44), (45), (46) dans l'équation (41) :

$$(47) \quad \gamma_{2y} \tau^2 = \Delta V_y = \frac{e}{2m} E_1 V_1 \left(\frac{\sin i_1}{R_1} - \frac{\cos i_1}{R'_1} \right) \tau^2.$$

Expression pratique de ΔV_y . — Comme nous l'avons indiqué précédemment, il faut trouver une valeur approchée de ΔV_y au moins au 3^e ordre près. Dans l'expression de ΔV_y tous les termes géométriques sont connus exactement à partir des conditions initiales et de la forme des surfaces équipotentielles, sauf le champ $\vec{E}_1$ et le temps de transit τ .

Nous pouvons déterminer $\vec{E}_1$ au point A_1 exactement, en cherchant la limite du rapport $\Delta U / \Delta x$ en un point A de l'axe A_1X , quand nous faisons tendre A vers A_1 , ce qui n'est pas très pratique. Il sera plus commode de déterminer le champ au 1^{er} ordre près en le prenant égal à $\Delta U / \Delta x$ pour un point A très voisin de A_1 .

Pour que ΔV_y soit connu au 3^e ordre près, il nous suffit de calculer le temps de transit τ au 2^e ordre près ; mais en pratique la différence de potentiel entre les deux surfaces équipotentielles S_1 et S_2 d'une construction élémentaire ne sera pas infiniment petite, et la vitesse de l'électron ne pourra être considérée comme constante entre S_1 et S_2 . Pour une même erreur théorique, la différence de potentiel correspondante ΔU entre S_1 et S_2 sera d'autant plus grande que les rayons de courbure de la surface équipotentielle et de la ligne de champ passant par A_1 seront plus grands.

L'examen de l'expression de ΔV_y met d'ailleurs en évidence les rapports τ^2/R_1 et τ^2/R'_1 . Aussi chercherons-nous une expression approchée de τ facilement calculable, faisant intervenir les rayons R_1 et R'_1 .

Nous allons montrer que ce résultat est obtenu si nous prenons pour expression approchée de τ le temps de transit le long d'une parabole osculatrice.

On définit le champ $\vec{E}'_1$ correspondant, en prenant comme surface plane S'_2 au potentiel U_2 le plan perpendiculaire à A_1X passant par le point A'_2 obtenu par la méthode de la parabole osculatrice. Si nous nous reportons à la figure 13, nous avons alors, en posant $\vec{E}'_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x'_1}$ où $\Delta x'_1$ est la distance des plans $S'_1 S'_2$:

$$(48) \quad B_1 B'_1 = \frac{e}{m} E'_1 \tau'$$

au lieu de :

$$(49) \quad B_1 B_2 = \frac{e}{m} E_1 \tau,$$

d'où l'on peut tirer τ' .

Calcul des temps de transit τ et τ' à partir des développements des vitesses. — Les temps de transit τ et τ' peuvent être exprimés sous la forme de développements par rapport à ΔU :

$$(50) \quad \tau = \beta_1 \Delta U + \beta_2 \Delta U^2 + \beta_3 \Delta U^3 + \dots$$

$$(51) \quad \tau' = \beta'_1 \Delta U + \beta'_2 \Delta U^2 + \beta'_3 \Delta U^3 + \dots$$

Pour le calcul de τ on reporte l'expression de τ donnée par l'équation (50) dans (40), puis les développements de x et y par rapport à ΔU , ainsi exprimés, dans (37) et l'on identifie par rapport à ΔU .

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{E_1 V_1 \cos i_1}, \\ \beta_2 &= -\frac{1}{E_1 V_1 \cos i_1} \left[\frac{1}{4 U_1 \cos^2 i_1} + \frac{1}{E_1^2} (a + b \operatorname{tg} i_1 + c \operatorname{tg}^2 i_1) \right], \\ \beta_3 &= -\frac{1}{E_1 V_1 \cos i_1} (A - B + C), \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{E_1^3} (d + e \operatorname{tg} i_1 + f \operatorname{tg}^2 i_1 + g \operatorname{tg}^3 i_1), \\ B &= 2 \left[\frac{1}{4 U_1 \cos^2 i_1} + \frac{1}{E_1^2} (a + b \operatorname{tg} i_1 + c \operatorname{tg}^2 i_1) \right]^2, \\ C &= \frac{1}{3} \frac{2a + b \operatorname{tg} i_1}{U_1 E_1^2 \cos^2 i_1}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en portant dans (38) :

$$\begin{aligned} y &= \frac{\Delta U}{E_1} \operatorname{tg} i_1 \left\{ 1 - \left[\frac{1}{4 U_1 \cos^2 i_1} + \frac{1}{E_1^2} + (a + b \operatorname{tg} i_1 + c \operatorname{tg}^2 i_1) \right] \Delta U \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{E_1^3} (d + e \operatorname{tg} i_1 + f \operatorname{tg}^2 i_1 + g \operatorname{tg}^3 i_1) + \frac{8a - b(\cotg i_1 - 4 \operatorname{tg} i_1) - 2c}{12 U_1 E_1^2 \cos^2 i_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left(\frac{1}{E_1^2} (a + b \operatorname{tg} i_1 + c \operatorname{tg}^2 i_1) + \frac{1}{4 U_1 \cos^2 i_1} \right)^2 \right] \Delta U^2 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (52)$$

Pour le calcul de τ' on exprime l'ordonnée Y' du point A'_2 d'intersection de la droite $x' = y' \cotg i$ avec la surface S_2 sous forme d'un développement en ΔU . On obtient ainsi :

$$(53) \quad y' = \frac{\Delta U}{E_1} \operatorname{tg} i_1 \left\{ 1 - \left[\frac{1}{E_1^2} (a + b \operatorname{tg} i_1 + c \operatorname{tg}^2 i_1) + \frac{1}{4 U_1 \cos^2 i_1} \right] \Delta U + \delta_3 E_1 \cotg i_1 \Delta U^2 + \dots \right\}$$

avec

$$\delta_3 = -\frac{1}{E_1 \cotg i_1} (A''' - B''' + C''')$$

en posant :

$$\begin{aligned} A''' &= \frac{1}{E_1^3} (d + e \operatorname{tg} i_1 + f \operatorname{tg}^2 i_1 + g \operatorname{tg}^3 i_1) \\ B''' &= 2 \left[\frac{1}{E_1^2} (a + b \operatorname{tg} i_1 + c \operatorname{tg}^2 i_1) + \frac{1}{4 U_1 \cos^2 i_1} \right]^2 \\ C''' &= \frac{1}{4 U_1 E_1^2 \cos^2 i_1} (3a + 2b \operatorname{tg} i_1 + c \operatorname{tg}^2 i_1). \end{aligned}$$

Comme d'autre part $y' = V_1 \sin i_1 \tau'$, on déduit τ' immédiatement de (53). De (50) et (51) on tire :

$$(54) \quad \frac{\tau}{\tau'} = 1 + \frac{a + 2b \operatorname{tg} i_1 + 3c \operatorname{tg}^2 i_1}{12 U_1 E_1^2 \cos^2 i_1} \Delta U^3 + \dots,$$

ce qui montre que la différence $\tau - \tau'$ est infiniment petite du 3^e ordre, et permet donc de remplacer τ^2 par τ'^2 pour le calcul de $\vec{V}'_2$ ou de $\vec{V}''_2$.

En explicitant l'équation (42), nous avons :

$$(55) \quad E_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1} \left[1 + \frac{\Delta x_1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{l} \right) \right].$$

Nous pouvons remplacer pour le calcul de ΔV_y le champ $\vec{E}_1$ par le champ $\vec{E}'_1 = \Delta U / \Delta x_1$. Compte tenu de ces approximations, l'erreur sur ΔV_y est du 3^e ordre.

Remarque : La relation (54) peut être mise sous la forme :

$$(56) \quad \tau = \tau' \left[1 - \frac{1}{12} \frac{\Delta U^3}{U_1} \frac{\Delta x_1}{\cos^2 i_1} \left(\frac{2}{R_1} \operatorname{tg} i_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{l} \right) - \frac{3}{R_1} \operatorname{tg}^2 i_1 \right) \right].$$

Nous voyons que nous pourrions dans la plupart des cas assimiler τ à τ' avec une bonne précision, ce qui donne, en reportant (55) et (56) dans (47) et en tenant compte de ce que $\tau' = \frac{B_1 B'_1}{e E'_1}$,

$$(57) \quad E'_1 = \Delta U / \Delta x_1$$

et des notations de la figure 15 :

$$(58) \quad \Delta V_y \simeq \frac{B_1 B'_1{}^2}{OB_1{}^2} \left(\frac{OB}{R_1} - \frac{BB_1}{R'_1} \right) \frac{U_1}{\Delta U} \Delta x'_1.$$

Autres remarques. — 1^o Si la différence de potentiel ΔU entre les deux surfaces S_1 et S_2 est assez petite pour qu'on puisse considérer comme constants la vitesse entre S_1 et S_2 ainsi que l'angle d'incidence i_1 , la relation (58) se réduit à :

$$(59) \quad \Delta V_y = \frac{1}{2} B_1 B'_1 \left(\frac{\Delta x_1}{R_1} \operatorname{tg} i_1 - \frac{\Delta x_1}{R'_1} \right).$$

2^o Si les rayons de courbure étaient infiniment grands, nous pourrions déterminer directement, par la méthode de la parabole osculatrice, l'extrémité de la trajectoire et la vitesse en ce point. S'ils sont très grands, nous pourrions aller d'un point A_i à un point A_j non infiniment voisin pour une erreur théorique donnée, ce qui diminuera l'erreur graphique totale et augmentera la précision du tracé. L'examen des relations précédemment établies montre que la grandeur de l'erreur est liée à la valeur du produit $\tau \frac{\Delta x}{R}$. Les coefficients d, e, f, g du développement du potentiel au voisinage du point A_1 sont généralement très inférieurs aux coefficients a, b, c , mais nous ne pouvons plus négliger dans les expressions de la vitesse, et par rapport aux termes en τ^2 , les deux termes suivants en τ^3 :

$\frac{b}{6} \left(\frac{e}{m} \right)^2 E_1 \tau^3$ pour la composante tangentielle de la vitesse ;

$\frac{a}{3} \left(\frac{e}{m} \right)^2 E_1 \tau^3$ pour la composante normale.

Si bien que les formules utilisées pour déterminer V'_2 deviennent :

$$(60) \quad \begin{aligned} V'_{2x} &= V_1 \cos i_1 + \frac{m}{e} E_1 \tau + \frac{e V_1}{2m} (2a \cos i_1 + b \sin i_1) \tau^2 + \frac{a}{3} \left(\frac{e}{m} \right)^2 E_1 \tau^3, \\ V'_{2y} &= V_1 \sin i_1 + \frac{e V_1}{2m} (b \cos i_1 + 2c \sin i_1) \tau^2 + \frac{b}{6} \left(\frac{e}{m} \right) E_1 \tau^3. \end{aligned}$$

En posant :

$$\Delta V_{2y} = -\frac{1}{3} \frac{\overline{B_1 B'_1}^3}{OB_1{}^2} \frac{\varphi_1}{\Delta \varphi} \frac{\Delta x_1}{R'_1},$$

la correction à effectuer sur la composante tangentielle devient :

$$\Delta' V_y = \Delta V_y + \Delta V_{2y}.$$

Expression pratique de $\Lambda_1 \Lambda'_2$.

Des expressions précédentes des composantes de la vitesse V'_2 nous déduisons :

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 \Lambda'_2)_x &= \tau \left[V_1 \cos i_1 + \frac{1}{2} \frac{e}{m} E_1 \tau + \frac{e V_1}{6m} (2a \cos i_1 + b \sin i_1) \tau^2 + \frac{a}{12} \left(\frac{e}{m} \right)^2 E_1 \tau^3 \right], \\ (\Lambda_1 \Lambda'_2)_y &= \tau \left[V_1 \sin i_1 + \frac{1}{6} \frac{e}{m} V_1 (b \cos i_1 + 2c \sin i_1) \tau^2 + \frac{b}{24} \left(\frac{e}{m} \right)^2 E_1 \tau^3 \right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons transformer ces expressions de façon à calculer la correction $\Delta y'$ qu'il faut effectuer sur la composante y' obtenue par la méthode de la parabole osculatrice pour avoir une approximation de quatrième ordre (fig. 15). Nous avons alors :

$$\frac{\Delta y'}{y'} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V_y}{OB} + \frac{1}{4} \frac{\Delta V_{2y}}{OB}$$

qui se réduit, si $\Delta V_{2y} \ll \Delta V_y$, à :

$$(61) \quad \frac{\Delta y'}{y'} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V_y}{OB}.$$

Construction graphique. — On effectue d'abord la construction de la parabole osculatrice et l'on mesure sur la distribution de potentiel les grandeurs R_1, R'_1, l . On calcule ΔV_y . On reporte sur OY (fig. 15) un segment BB_4 égal à ΔV_y et l'on mène par B_4 une parallèle à OX dont l'intersection B_3 avec le cercle C_2 donne l'extrémité du vecteur $\vec{V}'_2$.

Précision graphique. — La précision graphique sera étudiée plus loin, après la description d'un appareil permettant d'appliquer facilement et avec précision la construction précédente.

RETOUR SUR LA MÉTHODE DE LA PARABOLE OSCULATRICE. — On peut se demander, lors de l'application de la méthode de la parabole osculatrice, comment choisir les surfaces équipotentielles pour obtenir la plus grande précision entre les équipotentielles U_0 et U_t , extrémités de la trajectoire. Ce problème est très complexe, car il faut tenir compte de ce que les conditions initiales à partir de la 2^e construction ne sont plus exactes, d'où une certaine erreur qui se répercutera sur tout le tracé de la trajectoire. Les résultats auxquels on aboutirait ne seraient d'aucune utilité pratique, par suite de leur complication. Néanmoins on peut avoir une idée sur la façon de choisir les surfaces équipotentielles en en considérant deux, U_0 et U_n pas trop éloignées, de façon à pouvoir utiliser les résultats précédemment établis lors de l'étude de la courbe surosculatrice, et en cherchant à rendre minimum l'erreur commise pour aller de U_0 à U_n . Nous admettrons que l'utilisation des résultats précédents conduit à la précision la plus grande sur le tracé de la trajectoire entre les surfaces équipotentielles U_0 et U_t .

Il est évident que l'on n'a pas intérêt à trop augmenter le nombre des constructions. En effet, considérons un certain nombre de constructions élémentaires utilisant les surfaces équipotentielles $S_0, S_1, \dots, S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \dots$ assez proches pour que les erreurs théoriques soient négligeables devant les erreurs graphiques. Remplaçons ces deux constructions élémentaires entre les surfaces S_n et S_{n+1} , S_{n+1} et S_{n+2} par une seule construction utilisant les surfaces S_n et S_{n+2} . La précision du tracé aura été augmentée si l'erreur théorique commise alors est encore négligeable devant l'erreur graphique.

Soient S_0 et S_n les surfaces de potentiels U_0 et U_n auxquelles nous appliquons la méthode parabolique en supposant exactes les données initiales. Nous avons vu que l'erreur totale δV_y est donnée approximativement par :

$$\delta V_y = \underbrace{\frac{1}{2} B_0 B_n \left(\frac{\Delta x_{0n}}{R_0} \operatorname{tg} i_0 - \frac{\Delta x_{0,n}}{R'_0} \right)}_{\text{erreur théorique}} + \underbrace{B_0 B'_n \Delta \beta + \delta y}_{\text{erreur graphique}}$$

en affectant de l'indice 0 les lettres se rapportant à la surface S_0 , de l'indice n celles se rapportant à S_n , de on celles qui se rapportent aux deux surfaces et où δy correspond à la somme des erreurs de pointés et de reports de directions.

Posons :

$$\Delta \gamma = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_1}{R'_1} - \frac{\Delta x_1}{R_1} \operatorname{tg} i_1 \right).$$

Supposons qu'entre S_0 et S_n nous considérons $n-1$ surfaces équipotentielles $S_1, S_2, \dots$ de telle sorte que $\Delta \gamma_{01} = \dots = \Delta \gamma_{n-1,n} = \dots$. Dans la mesure où R'_1, R_1 et $\operatorname{tg} i_1$ sont constants dans la partie considérée, nous avons :

$$\Delta x_{01} = \Delta x_{0n} / n.$$

Considérons maintenant des cercles de rayons

proportionnels respectivement à $\sqrt{U_0}, \sqrt{U_1}, \dots, \sqrt{U_n}, \dots$. La construction élémentaire appliquée à chaque intervalle définit les points $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ (fig. 18).

La relation (48) appliquée entre S_0 et S_1, S_1 et $S_2, \dots$ donne :

$$B_0 B_n = \frac{e}{m} E_0 \frac{\Delta x_{0n}}{V_0 \cos i_0}.$$

En ne considérant que le premier terme du développement de τ par rapport à ΔU (50) :

$$B_0 B_1 = \frac{e}{m} E_0 \frac{\Delta x_{01}}{V_0 \cos i_0} = \frac{e}{m} E_0 \frac{\Delta x_{0n}}{n V_0 \cos i_0},$$

$$B_1 B_2 = \frac{e}{m} E_0 \frac{\Delta x_{0n}}{n V_1 \cos i_1};$$

il en résulte que $B_0 B_1 = B_0 B_n / n$ et que $B_1 B_2, B_2 B_3, \dots$ sont voisins de $B_0 B_n / n$.

L'erreur commise en effectuant ces n constructions est au plus :

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{0,1,2,\dots,n} &= \Delta \gamma_{0,1} B_0 B_1 + \Delta \gamma_{1,2} B_1 B_2 + \dots \\
 &\quad + \Delta \beta (B_0 B_1 + B_1 B_2 + \dots) + n \delta y \\
 &= \frac{\Delta \gamma_{0n}}{n} (B_0 B_1 + B_1 B_2 + \dots) \\
 &\quad + \Delta \beta (B_0 B_1 + \dots) + n \delta y \\
 &= B_0 B_n \cdot \Delta \beta + B_0 B_n \cdot \frac{\Delta \gamma_{0n}}{n} + n \delta y.
 \end{aligned}$$

On voit qu'elle comprend deux termes dépendant de n et un qui n'en dépend pas. Ceci montre en particulier la nécessité de la détermination précise de la normale. Cherchons à rendre minimum l'expression :

$$S = B_0 B_n \frac{\Delta \gamma_{0n}}{n} + n \delta y.$$

Posons $B_0 B_n \cdot \Delta \gamma_{0n} = k^2 \delta y$, k étant un nombre entier plus grand que n :

$$S = \delta y \left(\frac{k^2}{n} + n \right),$$

qui est minimum pour $n = k$.

Si nous considérons l'erreur théorique correspondant à une des constructions élémentaires ainsi définies, nous avons d'après ce qui précède :

$$B_0 B_1 \cdot \Delta \gamma_{01} = \frac{B_0 B_n}{n} \cdot \frac{\Delta \gamma_{0n}}{n} = \frac{B_0 B_n \cdot \Delta \gamma_{0n}}{n^2} = \delta y,$$

ce qui montre que les surfaces équipotentielles doivent être choisies de telle sorte que l'erreur théorique soit du même ordre que l'erreur commise sur la définition de l'ordonnée du point par rapport à celle de B_0 .

Remarques : 1^o D'après ce qui précède, on voit que l'erreur graphique totale due à la détermination de la normale est indépendante du nombre des constructions effectuées.

Pratiquement nous ne considérons pas une série de cercles de rayons respectivement proportionnels à $\sqrt{U_0}, \sqrt{U_1}, \dots$, mais des cercles dont le rayon est proportionnel à $\sqrt{\frac{U_n}{U_{n+1}}}$.

Considérons trois surfaces S_1, S_2, S_3 et l'erreur

$$\sum B_0 B_n \cdot \Delta \beta.$$

Dans le cas où nous allons directement de S_1 à S_3 , nous avons, en utilisant les notations habituelles :

$$B_0 B_3 = \cos i_3 - \sqrt{\frac{U_1}{U_3}} \cos i_1.$$

Si nous appliquons la construction entre S_1 et S_2 puis entre S_2 et S_3 , nous avons :

$$\sum B_0 B_n \simeq \cos i_3 - \sqrt{\frac{U_2}{U_3}} \cos i_2 + \cos i_2 - \sqrt{\frac{U_1}{U_2}} \cos i_1.$$

En retranchant ces deux expressions, nous obtenons :

$$\Delta(B_0 B_n) = - \left(1 - \sqrt{\frac{U_2}{U_3}} \right) \left(\cos i_2 - \sqrt{\frac{U_1}{U_2}} \cos i_1 \right)$$

avec

$$U_1 < U_2 < U_3.$$

On voit que $\Delta(B_0 B_n)$ est < 0 , ce qui montre que l'on a avantage à réduire le nombre des constructions graphiques.

2° Pour de faibles valeurs du potentiel, $\delta y/B_0 B_1$ est très petit, ce qui entraîne un grand nombre de constructions élémentaires.

Nous sommes ainsi conduits, pour en réduire le nombre, donc l'erreur totale, à utiliser la méthode de la courbe surosculatrice. Cela est indispensable si le rayon de courbure est faible ou si l'angle d'incidence aux faibles vitesses est important, car l'application de la méthode parabolique obligerait à prendre des équipotentiels très rapprochées.

En vue de réduire au maximum les erreurs graphiques, on peut réaliser un appareil évitant les erreurs de report, associé à un système optique permettant de déterminer la normale à une courbe avec grande précision. Ce système est d'autant plus nécessaire que pour appliquer la méthode de la courbe surosculatrice, il faut déterminer les rayons de courbure de la surface équipotentielle et de la ligne de champ au point A_1 .

RAPPORTEUR POUR L'APPLICATION DE LA MÉTHODE PARABOLIQUE. — *Principe.* — L'application de la construction élémentaire (fig. 13) correspondant à la méthode de la parabole osculatrice comporte la connaissance d'un cercle de rayon unité qui peut être tracé une fois pour toutes ; puis celle du point B_1

tel que $\vec{OB}_1$ soit parallèle à $\vec{V}_1$ avec $OB_1 = \sqrt{U_1/U_2}$. Cette construction peut être faite si nous plaçons sur la feuille F, où s'effectue le tracé de la trajectoire, la figure 13 supposée transparente, de telle façon que le point O coïncide avec A_1 et que OX' coïncide avec la normale à la surface équipotentielle en A_1 . OZ étant une droite (tracée sur une feuille transparente indéformable) pivotant autour de O et graduée de façon convenable, pourra être amenée en coïncidence avec la direction du vecteur $\vec{V}_1$ supposée

repérée sur la feuille F ; le point B_1 est alors déterminé par $OB_1 = \sqrt{\frac{U_1}{U_2}}$.

Si nous supposons que la figure 13 est tracée sur une feuille de papier millimétrique dont les directions de quadrillage coïncident avec OX' et OY' , le point B'_1 sera immédiatement défini et on obtiendra

facilement le point M, extrémité du vecteur $\frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{2}$.

Pour reporter les directions de OM et OB'_1 sur la feuille F, il suffit d'amener la droite OZ en coïncidence avec OM, puis avec OB'_1 , et dans chaque cas de repérer ces directions sur la feuille F, ce qu'on peut faire si l'on suppose que OZ dépasse la feuille transparente sur laquelle a été faite la construction

Remarques. — 1° Nous obtenons ainsi la direction $\vec{V}'_2$ de la vitesse en A_1 . Pour recommencer la construction précédente, il faudra d'abord mener par A_2

la parallèle à $\vec{V}'_2$, ce qui peut être fait sur F. Cette opération peut être évitée si nous supposons que la réglette mobile transparente pivotant autour de O et portant OZ porte aussi une série de traits parallèles à OZ, distants par exemple de millimètre en millimètre, car il suffira alors d'amener un de ces traits en coïncidence avec $\vec{V}'_2$, lors de l'application de la construction de la parabole osculatrice au point A_2 .

2° Pour l'application de la méthode de la courbe surosculatrice (fig. 15), le point B_1 étant déterminé, il suffit de reporter sur l'axe OY une longueur $BB_4 = \Delta V_y$. Puisque nous opérons sur une feuille millimétrée, le point B_3 est immédiatement obtenu.

Détermination de la normale. — Nous pouvons remplacer la recherche de la normale en un point M d'une courbe par la recherche de l'axe de symétrie d'un arc $\widehat{PMQ}$ tel que $PM = MQ$ soit suffisamment petit pour qu'on puisse considérer comme constant le rayon de courbure le long de cet arc.

Montrons que l'on peut résoudre optiquement ce problème à l'aide d'un prisme droit ayant pour section droite un triangle isocèle et placé de telle sorte que son plan de symétrie passe toujours par M.

Étudions d'abord le cas où le rayon de courbure est infini et supposons l'œil de l'observateur regardant à travers le prisme, placé dans le plan de symétrie de celui-ci et suffisamment éloigné pour que les divers rayons émergents puissent être considérés comme parallèles (fig. 19).

Les rayons issus de la face NI correspondent à des points situés dans la région $qq'ii'$, et ceux issus de la face NJ à des points situés dans la région $pp'jj'$.

Les points P et Q de la courbe seront vus par l'observateur en $pp'j'$ et $q'iq_j$ et le segment T_1T_2 sera vu à travers le prisme sous forme de deux segments de droites $T_1q'_1$ et $T_2p'_j$. Nous voyons

que si T_1T_2 est perpendiculaire à nn' , les points p'_j et q'_i seront confondus sur nn' et réciproquement, et que la direction de l'arête du prisme donnera celle de la normale.

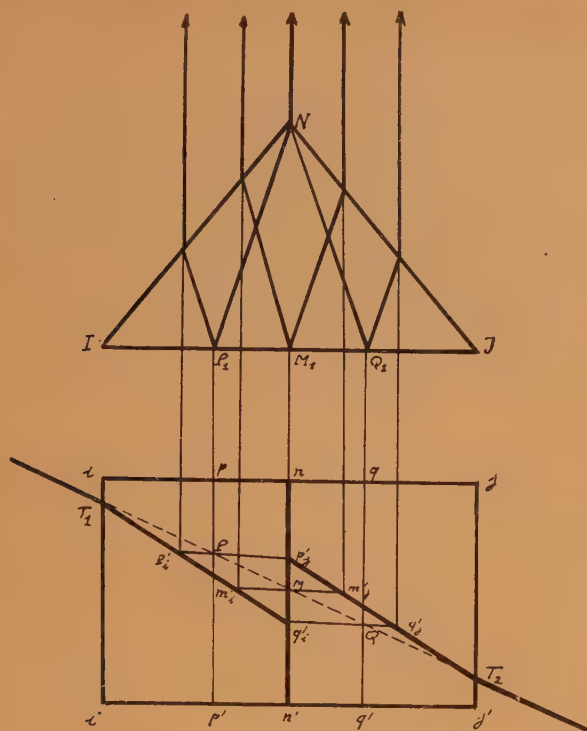


FIG. 19.

Nous pouvons remarquer que les deux images de T_1T_2 données par le prisme seront toujours en coïncidence sur l'arête, quelle que soit la position de l'œil, la droite étant alors comprise tout entière dans un plan de section principale.

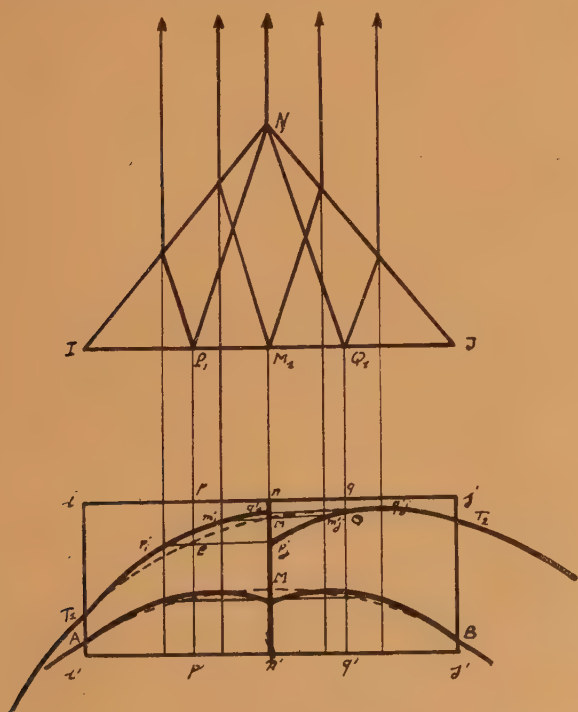


FIG. 20.

Considérons maintenant le cas de l'arc de cercle (fig. 20). Supposons le prisme disposé de telle sorte

que nn' coïncide avec la normale en M à l'arc $\widehat{BMA}$ et l'œil placé dans le plan de symétrie du prisme contenant nn' . Les droites pp' et qq' sont symétriques par rapport à nn' et les images de P et Q sont confondues sur nn' . Cette position de l'œil est indispensable dans ce cas, car la courbe n'est plus comprise dans un plan de section droite. Nous allons montrer que, si l'arête du prisme coïncide avec la normale à l'arc du cercle, l'œil n'étant pas placé dans le plan de symétrie du prisme, les deux images de la courbe ne seront plus en coïncidence sur l'arête. Supposons que l'œil s'écarte un peu du plan de symétrie d'un angle Δi (fig. 21), les rayons NP_1 et NQ_1 vont tourner d'angles Δr_1 et Δr_2 de même sens que Δi . Les points P et Q viendront en P' et Q'. P' se trouvant au-dessous de P et Q' au-dessus de Q, il résulte que les points p'_j et q'_i ne seront plus en coïncidence sur l'arête du prisme, bien que son plan de symétrie contienne la normale en M à la courbe.

Cela montre bien qu'il est nécessaire de placer l'œil dans le plan de symétrie du prisme.

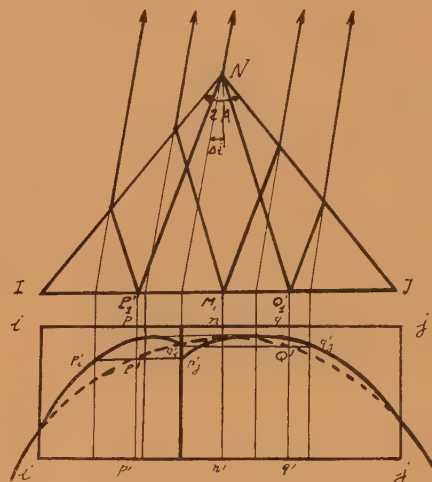


FIG. 21.

Détermination des dimensions du prisme. — Ses dimensions doivent être telles que l'arc $\widehat{PMQ}$, dont on a deux images, soit suffisamment petit d'une part pour qu'on puisse considérer le rayon de courbure comme constant le long de cet arc, d'autre part pour permettre un emploi facile du prisme.

Sensibilité et position de l'œil.

1° *Sensibilité.* — Considérons la figure 19. Nous voyons que la sensibilité liée à la distance $p'_jq'_i$ pour une droite T_1T_2 donnée est d'autant plus grande que la longueur pq est plus grande. Le fait de se donner cette longueur ne suffit pas à caractériser le prisme. On peut alors, pour le déterminer, se fixer arbitrairement son angle au sommet.

2° *Position de l'œil.* — Pour une courbe et une distance pq données, l'erreur due à la position de l'œil sera d'autant plus grande que la distance $P_1P'_1$ sera plus grande.

Un calcul simple montre que pour une erreur

angulaire Δi les déplacements $P_1P'_1$ et $Q_1Q'_1$ sont égaux.

Nous avons :

$$P_1P'_1 = Q_1Q'_1 = d \frac{\Delta r}{\sin^2 (A + r)} = \Delta X_1$$

$$= d \Delta i \frac{\sin A}{n \cos r \sin^2 (A + r)},$$

où r est lié à A par la relation : $\sin r = \frac{\cos A}{n}$
(n , indice de réfraction du prisme).

L'étude de $\Delta x_1/d\Delta i$ en fonction de A conduit au résultat suivant, en prenant $n = 1,5$:

A	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\frac{\Delta x_1}{d\Delta i}$	0,25	0,40	0,50	0,55	0,60	0,63	0,66	0,66

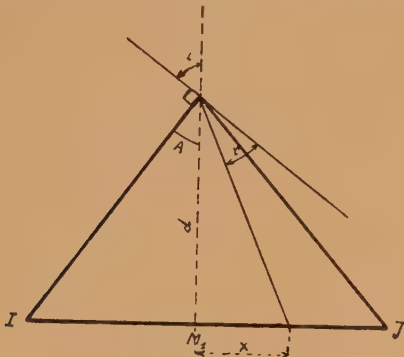


FIG. 22.

3° Étude de la variation de la distance d en fonction de l'angle du prisme pour une longueur $pq = 2X$ constante. — Nous avons (fig. 22) :

$$\operatorname{tg} (i - r) = \frac{X}{d},$$

$$\sin i = n \sin r,$$

$$i = \frac{\pi}{2} - A,$$

ce qui permet d'étudier $d = f(A)$ et conduit aux résultats suivants :

A	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\frac{d}{x}$	1,23	1,66	2,14	2,40	3,73	5,45	8,8	19,0
d	2,4	3,2	4,2	6,0	7,4	10,9	17,6	38,0

en prenant $x = 2$ mm, pour avoir encore une bonne sensibilité.

4° Choix de l'angle du prisme. — Des deux tableaux précédents on déduit les valeurs de $\Delta x_1/\Delta i$ en fonction de A :

A	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\frac{\Delta x_1}{\Delta i}$	0,6	1,3	2,1	3,3	4,3	6,9	11,6	25

On voit que l'on a avantage à prendre pour A un angle aussi petit que possible, pour réduire l'erreur due à une mauvaise position de l'œil. On est cependant limité par des considérations d'ordre pratique,

le prisme ne devant pas être trop petit pour pouvoir être usiné facilement. Aussi prendra-t-on un angle A voisin de 30°. Ce système permet de déterminer la normale avec une erreur inférieure à 10'. La précision peut encore être augmentée avec l'aide d'une loupe.

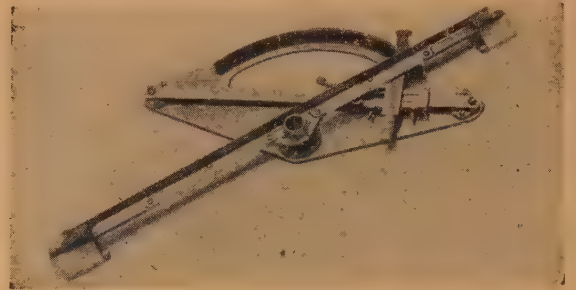


FIG. 23.

Description du rapporteur. — Il comprend (fig. 23) :
un support limité par un cercle de rayon 200 mm, correspondant au cercle C_2 ;

un système mécanique assurant le déplacement d'une droite parallèlement à OX , des déplacements très petits pouvant être effectués à l'aide d'une vis micrométrique et d'un vernier ;

une alidade permettant de repérer les différentes directions des vecteurs envisagés et de les reporter sur la feuille où s'effectue le tracé ;

un prisme servant à la détermination exacte de la normale.

De plus, cet appareil est gradué de manière qu'on puisse connaître facilement les grandeurs intervenant dans la méthode de la courbe surosculatrice. Les divers organes sont placés de telle sorte que les différentes opérations nécessitant la coïncidence de deux repères puissent être faites sans erreur de parallaxe et avec grande exactitude.

ILLUSTRATION DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES. — Pour illustrer les méthodes précédemment décrites, nous les appliquerons à la détermination d'une trajectoire qu'il est possible de connaître exactement par ailleurs.

Nous prendrons le cas d'un électron ayant une certaine vitesse initiale, se déplaçant dans un champ de forces, créé par un autre électron et tel que la trajectoire soit un arc d'hyperbole. Il est évident que l'approximation hyperbolique donnerait en une seule construction l'extrémité de la trajectoire et la vitesse en ce point. Aussi, pour illustrer les méthodes précédemment décrites, n'utiliserons-nous que l'approximation parabolique, les surfaces équipotentielles étant choisies de telle sorte que dans une construction élémentaire l'erreur théorique soit égale à l'erreur graphique ; puis nous appliquerons la méthode de la courbe surosculatrice.

Pour mettre en évidence l'erreur théorique d'une part, les erreurs graphiques d'autre part, nous déterminerons par le calcul la trajectoire correspondant à l'approximation parabolique. Nous évaluerons ensuite l'erreur graphique totale.

APPROXIMATION DE LA PARABOLE OSCULATRICE. —
Évaluation de l'erreur graphique dans une construction élémentaire. — Cette évaluation est nécessaire, puisqu'elle fixe le choix des différentes surfaces équipotentiellles. En utilisant l'appareil précédemment décrit, on peut considérer que le double de l'écart-type sur la détermination de la composante tangentielle de la vitesse est de 0,35 mm, ce qui correspond à une probabilité de 50 % de faire une erreur plus grande.

Détermination de la trajectoire. — L'hyperbole est définie par la relation :

$$r = \frac{24,612\,766}{1 - 1,051\,063\,83 \cos \theta};$$

elle correspond à une longueur focale de 247×2 mm et à une distance des sommets de 235×2 mm.

Les conditions initiales sont :

$$r = 487 \text{ mm} \quad U_1 = 10 \text{ volts} \quad i_1 = 56^\circ 42' 13'', 76.$$

La distribution du potentiel en fonction de r est donnée par

$$U - U_1 = 276,471\,24 \left(1 - \frac{487}{r}\right);$$

le point terminal de la trajectoire se trouve sur la surface équipotentielle 91 volts. Sa longueur est d'environ 20 cm.

Nous sommes conduits à faire 7 constructions, les surfaces utilisées étant :

10 V, 13,5 V, 19 V, 27 V, 38 V, 52 V, 70 V, 91 V.

En désignant par $A_n A'_n$ l'erreur sur la position du point A_n et par Δi_n l'erreur sur la direction de la vitesse, nous avons :

U en volts	r en mm	n	$A_n A'_n \times 100$ en mm	Δi_n
13,5	493,2	2	1,8	8'27",00
19	503,4	3	6,9	13'52",89
27	519,0	4	16,5	18'2",26
38	541,9	5	30	21'29",27
52	574,2	6	52	24'15",11
70	623,0	7	86	26'58",12
91	688,8	8	137	29'10",42

Nous voyons que les erreurs théoriques commises sont faibles.

Comme dans chaque construction nous avons pris l'erreur graphique égale à l'erreur théorique lors de la détermination de la vitesse $\vec{V}_2$, il résulte que l'erreur graphique sur la direction de la vitesse est de $\pm 29'10''$ (fig. 24) et que l'erreur maximum commise dans la détermination de $\vec{V}_2$ est de 1° environ.

Si le nombre des constructions élémentaires n'est pas trop petit, la composition des erreurs graphiques individuelles, indépendantes les unes des autres, donnera une erreur totale E . Si l'on refaisait le tracé un très grand nombre de fois, les erreurs E se trouveraient réparties suivant une courbe en cloche.

L'écart-type pour cette courbe en cloche est de l'ordre de $10'$, si bien que la probabilité de faire une erreur inférieure à $10'$ est de 68 % et celle de faire une erreur inférieure à $20'$ de 95 %.

Si nous admettons que l'erreur graphique sur la position d'un point est de 0,1 mm, l'erreur maximum sera $\pm 0,7$ mm environ pour la position du point A_1 .

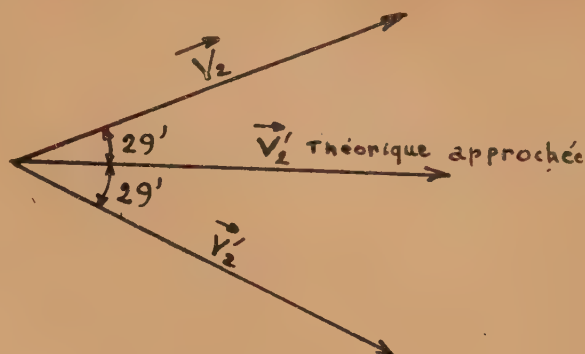


FIG. 24.

Approximation de la courbe surosculatrice. — L'étude des erreurs commises dans l'évaluation de ΔV_y montre que la plus importante provient de la détermination des rayons de courbure. Dans l'exemple traité, ceux-ci sont connus exactement, mais afin de nous placer dans les conditions d'utilisation, nous tiendrons compte de l'erreur que nous commettrions pour les mesurer.

Si nous utilisons le système du prisme en repérant les normales en deux points voisins de la courbe, nous pouvons déterminer les rayons de courbure à moins de $3/100$.

Nous prendrons donc $\Delta V_y \leq 2$ mm, l'erreur graphique commise étant au maximum de 0,5 mm.

Détermination de la trajectoire. — Dans ces conditions, les surfaces intermédiaires utilisées sont :

10 V, 23 V, 48 V, 91 V.

Les erreurs commises sont :

U en volts	$A_n A'_n \times 1\,000$ en mm	Δi
23	4	2'23"
48	38	4'43"
91	198	9'11"

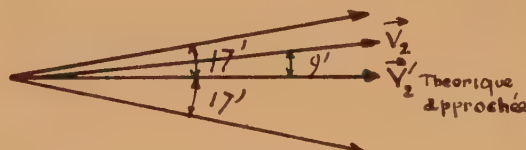


FIG. 25.

Nous voyons que l'erreur théorique sur la détermination du point est 7 fois plus faible et que l'erreur sur la direction de la vitesse est 3 fois plus faible.

L'erreur graphique maximum sur la direction de $\vec{V}_2$ comptée à partir de la vitesse donnée par la méthode de la courbe surosculatrice est de $\pm 17'$ environ, si bien que l'erreur commise est de $28'$ au maximum (fig. 25).

L'erreur graphique maximum sur la position du point est de 0,3 mm environ.

Ce qui précède montre que, sauf dans certains cas

particuliers où une partie de la trajectoire est très voisine d'une conique, nous avons avantage à utiliser la méthode de la courbe surosculatrice.

Le cas précédemment traité montre que l'utilisation de la méthode de la courbe surosculatrice fait gagner un facteur 2 ; mais l'emploi de cette méthode au voisinage d'une cathode où la vitesse de l'électron est très faible et où la présence d'un wehnelt donne des surfaces équipotentielles et des lignes de champ dont les rayons de courbure sont petits, diminue de beaucoup les erreurs commises lors de l'approximation parabolique, qui nécessite alors un très grand nombre de constructions.

Il en est de même si l'on veut tenir compte des vitesses à l'émission. En effet, si nous opérons à la cuve à l'échelle 20 (ce qui est déjà grand), nous serons conduits, pour l'approximation parabolique, à considérer, au voisinage immédiat de la cathode, des surfaces équipotentielles distantes de 2 mm et quelquefois moins. Les erreurs commises dans ce cas sont importantes, et se répercutent sur toute la trajectoire.

Ceci n'a pu être mis en évidence dans l'exemple traité, la vitesse de l'électron ne s'annulant jamais lors de sa trajectoire hyperbolique.

CAS PARTICULIERS. — Les résultats précédents ne peuvent être appliqués au cas où la surface S_1 est au potentiel 0 (le potentiel U_1 étant nul) et au cas où l'électron se réfléchit, puisqu'à une valeur de U correspondent deux valeurs de τ .

1^o Cas où la surface S_1 est au potentiel 0 ($\vec{V}_1 = 0$).

— Nous pouvons remarquer, d'une part que la position du point A_2 peut être déterminée uniquement par la connaissance de son ordonnée, puisqu'il se trouve sur la surface S_2 , d'autre part que les termes $y' - y$ et ΔV_y seront égaux respectivement aux grandeurs y et $\vec{V}_2$ de la trajectoire réelle, ces grandeurs étant nulles pour la trajectoire déduite de l'application de la construction classique.

Dans ce cas, les équations (40) et (41) se réduisent à :

$$(62) \quad x = \frac{1}{2} \frac{e}{m} E_1 \tau^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{e}{m} \frac{E_1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{l} \right) \tau^4 + \dots,$$

$$(63) \quad y = -\frac{1}{6} \left(\frac{e}{m} \frac{E_1}{2} \right)^2 \frac{\tau^4}{R_1} + \alpha_6 \tau^6 + \dots,$$

$$(64) \quad V_{2y} = -\frac{2}{3} \left(\frac{e}{m} \frac{E_1}{2} \right)^2 \frac{\tau^3}{R_1} + 6 \alpha_6 \tau^5 + \dots,$$

le temps de transit τ pouvant être obtenu en fonction de U par un développement de la forme :

$$\tau = \omega_1 \Delta U^{1/2} + \omega_3 \Delta U^{3/2} + \omega_5 \Delta U^{5/2} + \dots,$$

ce qui donne :

$$\tau = \left(\frac{\Delta U}{\frac{e}{m} \frac{E_1^2}{2}} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{7}{24} \frac{\Delta U}{E_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{l} \right) + \dots \right].$$

En reportant dans (63) et (64) et en ordonnant par rapport à Δx_1 :

$$(65) \quad \Delta y = -\frac{1}{6} \frac{\Delta x_1}{R_1} \Delta x_1 \left[1 - \frac{17}{24} \left(\frac{\Delta x_1}{R_1} + \frac{\Delta x_1}{l} \right) \dots \right]$$

$$(66) \quad \Delta V_y = -\frac{1}{3} \frac{\Delta x_1}{R_1} B_1 B'_1 \left[1 + \frac{5}{8} \left(\frac{\Delta x_1}{R_1} + \frac{\Delta x_1}{l} \right) \dots \right],$$

ce qui montre que le rayon de courbure de la trajectoire est 3 fois celui de la ligne de champ passant par A_2 .

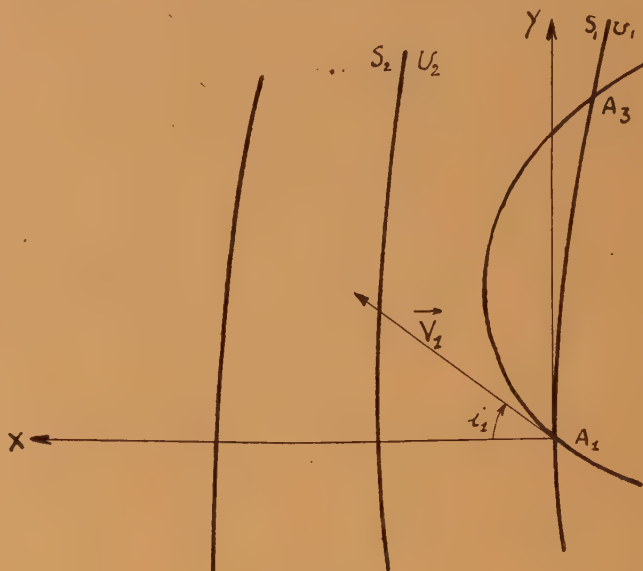


FIG. 26.

2^o Cas de la réflexion. — Considérons le cas où un électron se déplace dans un champ de freinage (fig. 26) et cherchons le point A_3 où la trajectoire recoupe la surface S_1 de potentiel U_1 . L'équipotentielle S_1 est choisie de telle sorte que le champ de freinage puisse être considéré comme constant dans la partie de l'espace utilisée.

Le point A_3 peut être alors obtenu par une construction géométrique ou par le calcul, ce qui permettra de mettre en évidence le choix de la surface S_1 correspondant à une erreur théorique inférieure à l'erreur graphique.

Soient A_1X la normale en A_1 à S_1 et A_1Y la tangente.

Cherchons les coordonnées du point A_3 .

Nous avons vu que :

$$(67) \quad \Delta U = E_1 V_1 \cos i_1 \tau + \left[\frac{1}{2} \frac{e}{m} E_1^2 + V_1^2 (a \cos^2 i_1 + b \sin i_1 \cos i_1 + c \sin^2 i_1) \right] \tau^2 + \dots$$

Le temps de transit τ de A_1 à A_3 sera une racine de l'équation obtenue en annulant la relation (67) :

$$(68) \quad 0 = E_1 V_1 \cos i_1 \tau + \dots$$

On constate que si $\cos i_1 = \varepsilon$ ou $\vec{V}_1 = \varepsilon$ l'équation (68) a une racine en τ infiniment petite, les termes en τ^2, τ^3 étant alors négligeables.

Supposons cette condition réalisée.

Nous avons alors :

$$(69) \quad \tau = - \frac{V_1 \cos i_1}{\frac{1}{2} \frac{e}{m} E_1 \left[1 + \frac{2mV_1^2}{eE_1^2} \right]} \cdot \frac{1}{(a \cos i_1 + b \sin i_1 \cos i_1 + c \sin^2 i_1) + \dots}$$

et si l'on reporte dans (68), l'erreur commise devient :

$$\delta \simeq E_1 V_1^2 \cos^2 i_1 \left[\frac{2}{3} \frac{e}{m} E_1 (2a \cos i_1 + b \sin i_1) + V_1^3 (d \cos^3 i_1 + e \sin i_1 \cos^2 i_1 + f \sin^2 i_1 \cos i_1 + g \sin^3 i_1) \right] \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{e}{m} E_1^2 + V_1^2 (a \cos^2 i_1 + b \sin i_1 \cos i_1 + c \sin^2 i_1)}$$

qui dans le cas d'un champ uniforme est nulle.

On obtiendra l'abscisse du point A_3 en reportant (69) dans (40) :

$$(70) \quad y \simeq 4 \frac{U_1}{E_1} \sin i_1 \cos i_1 P_5,$$

avec

$$P_5 = 1 - \frac{4U_1}{E_1^2} \left[a + b \left(\sin i_1 + \frac{1}{3} \frac{\cos^3 i_1}{\sin i_1} \right) + c \left(\sin^2 i_1 + \frac{2}{3} \cos^2 i_1 \right) \right]$$

en ordonnant par rapport à U_1 .

Si les surfaces considérées sont S_1 et S_0 : $U_1 = \Delta U$ et, en utilisant la relation (59), on peut mettre l'équation (70) sous la forme (en ordonnant les termes par rapport à Δx_1) :

$$y = 4\Delta x_1 \sin i_1 \cos i_1 P_6,$$

avec

$$P_6 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_1}{R_1} + \frac{\Delta x_1}{l} \right) - 4\Delta x_1 \left[\frac{\sin^2 i_1 + \frac{8}{3} \cos^2 i_1}{2R_1} - \frac{4}{R_1'} \left(\sin i_1 + \frac{1}{3} \frac{\cos^3 i_1}{\sin i_1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{l} \right) \right]$$

ce qui, dans le cas où R_1' et l sont grands et Δx_1 très petit, se réduit à :

$$(71) \quad y \simeq 4\Delta x_1 \sin i_1 \cos i_1.$$

CHAPITRE II

ÉTUDE A LA CUVE ÉLECTROLYTIQUE DE FAISCEAUX ÉLECTRONIQUES, COMPTE TENU DE LA CHARGE D'ESPACE.

RÉSUMÉ DU CHAPITRE II. — Dans un électrolyte et pour un régime électrique permanent, le potentiel U obéit à l'équation de Laplace $\Delta U(x, y, z) = 0$. Il en est de même à l'intérieur d'un tube à vide, si l'on peut négliger la charge d'espace. Il est classique d'utiliser ce rapprochement et les propriétés de l'équation de Laplace pour étudier sur un modèle agrandi, à la cuve électrolytique, la distribution de potentiel qui s'établit dans un tube à vide. Malheureusement, dans beaucoup de cas intéressants, cette méthode ne constitue qu'une première

approximation très grossière, en particulier au voisinage d'une cathode fonctionnant en régime de charge d'espace (cathode à oxyde). La distribution du potentiel dans le tube est alors donnée par l'équation de Poisson : $\Delta U_0(x, y, z) = 4\pi\rho$ ($\rho = 0$ en dehors du faisceau électronique).

L'étude qui suit montre que l'on peut tenir compte de la charge d'espace, en utilisant un fond de cuve convenablement modelé et en opérant par approximations successives.

Les résultats obtenus ne sont pas valables au voisinage d'une cathode fonctionnant en régime de charge d'espace, mais nous montrerons, par d'autres raisonnements, que l'on peut trouver, dans ces régions, un fond modelé satisfaisant aux conditions du problème.

Rappel des résultats classiques.

Dans le vide en l'absence de charges spatiales, le potentiel électrostatique U satisfait à l'équation de Laplace :

$$\Delta U = 0.$$

Il en est de même dans un électrolyte homogène en régime permanent.

Un ensemble d'électrodes portées à des potentiels fixes donnés fournit donc la même distribution de potentiel, qu'il soit placé dans le vide ou dans un électrolyte homogène indéfini.

De plus, le caractère homogène de l'équation de Laplace permet de substituer au système réel tout système homothétique et par ailleurs de multiplier par un même facteur toutes les tensions. En particulier il est possible d'alimenter les électrodes à partir d'une même source alternative.

Pratiquement, il est difficile d'utiliser un électrolyte sinon indéfini, du moins dans lequel le système d'électrodes serait largement immergé.

En effet, la détermination des surfaces équipotentielles s'effectue généralement à l'aide d'une sonde ; pour que celle-ci n'apporte pas de perturbation sensible, on évite de lui faire débiter du courant, grâce à une méthode de zéro : de plus on se borne généralement à faire des mesures à la surface libre du liquide. Il est donc commode que cette surface constitue une zone de mesure intéressante. Puisqu'elle sépare l'électrolyte d'un milieu isolant,

le vecteur densité de courant $\vec{i}$ et par suite le champ électrique $\vec{E}$ lui sont tangents en chaque point.

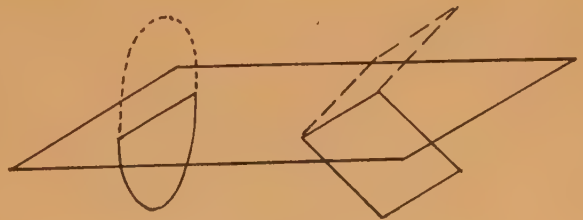


FIG. 27.

L'examen de cette condition aux limites montre que la distribution de potentiel obtenue est identique à celle que produit le système suivant : à chaque électrode est associée une électrode symétrique et portée au même potentiel (fig. 27) et l'en-

semble est plongé dans un électrolyte homogène indéfini.

Cette propriété facilite l'emploi de la méthode dans le cas où l'ensemble étudié possède un plan de symétrie : on se borne à matérialiser et à plonger dans l'électrolyte la moitié du système situé d'un côté de ce plan, que l'on fait coïncider avec la surface libre du liquide. On peut alors déterminer à l'aide de la sonde des lignes équipotentiellles dans cette surface seulement.

Les résultats obtenus fournissent cependant une connaissance complète de la distribution étudiée dans les deux cas suivants :

- Le système possède un axe de révolution ;
- Les électrodes sont des surfaces cylindriques à génératrices parallèles.

1° *Système de révolution.* — Une simplification supplémentaire peut être introduite, grâce aux considérations de symétrie qui viennent d'être exposées :

On se borne à matérialiser une partie du système limitée par deux plans méridiens dont l'un coïncide avec la surface libre du liquide et l'autre est constitué par un fond isolant (fig. 28).

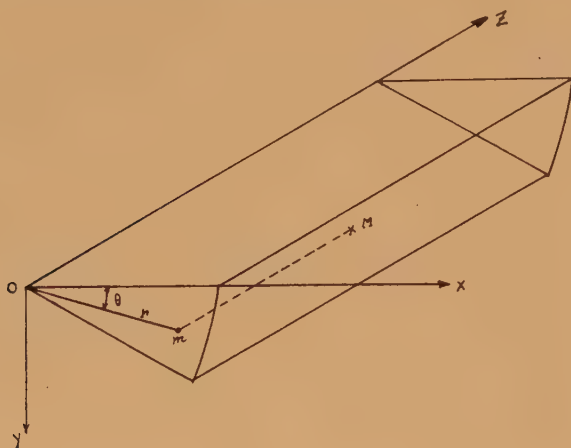


FIG. 28.

2° *Électrodes cylindriques à génératrices parallèles.*

— On peut alors limiter le système par deux plans de section droite : la surface du liquide et un fond isolant parallèle (fig. 29).

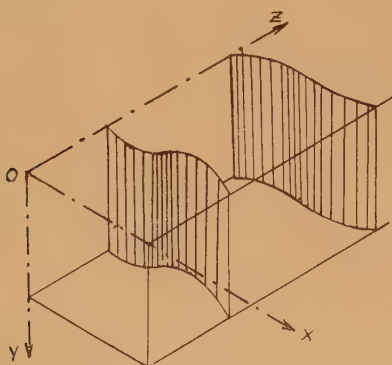


FIG. 29.

Représentation de l'effet de charge d'espace.

Nous avons à trouver une fonction du potentiel U_0 ,

dépendant de deux paramètres, définie par les conditions aux limites sur les électrodes et le système d'équations suivant, où l'on désigne par :

— ρ la densité de charge en un point M du tube à vide étudié,

i la densité de courant en M,

v la vitesse des électrons en M ; cette vitesse étant nulle au point de potentiel zéro :

$$(72) \quad \Delta U_0 = 4\pi\rho,$$

$$(73) \quad v = \sqrt{\frac{2e}{m}} U_0,$$

$$(74) \quad i = \rho v.$$

En éliminant ρ et v entre les équations (72), (73), (74), nous obtenons :

$$(75) \quad \Delta U_0 = \frac{4\pi i}{\sqrt{\frac{2e}{m}} U_0},$$

où le courant i se déduit des densités de courant sur la cathode et de la carte du potentiel par l'intermédiaire de la connaissance des trajectoires électroniques.

On peut résoudre ce système d'équations par approximations successives de la façon suivante :

On part d'une fonction U_1 dont on a des raisons de penser qu'elle est aussi proche que possible de la fonction U_0 . En particulier, si la densité de charge en tous points de l'espace est faible, on pourra prendre une fonction U_1 satisfaisant à $\Delta U_1 = 0$ et aux conditions aux limites. On en déduira des intensités de courant en tous points du faisceau, et par l'application de la relation (74) on calculera $\rho_1 = f(M)$. A cette distribution de charges, on peut associer, en appliquant la loi de Coulomb, une certaine distribution U'_1 . A partir de la carte du potentiel obtenue par addition de U_1 et de U'_1 , on tracera des trajectoires électroniques, on calculera les intensités de courant et ainsi de suite. Si la série des approximations est convergente, nous obtiendrons à la limite, des distributions U'_0 , ρ' et i' telles qu'en tous points de l'espace le groupe des relations (72), (73), (74) se trouve vérifié. Si la solution est unique, la fonction U'_0 s'identifiera à la fonction U_0 cherchée.

Nous allons montrer que dans la méthode des approximations successives, l'utilisation d'une cuve électrolytique à fond modelé évite le calcul de U'_1 à partir de la distribution des charges. Nous établirons au préalable la propriété suivante :

Étant donné une distribution de potentiel $U_0(x, y)$ satisfaisant à l'équation (72) et aux conditions aux limites, nous pourrions associer en chaque point $M(x, y)$ de la surface, une hauteur d'électrolyte $\mathcal{G}(x, y)$ définie le long d'une ligne de champ, par les relations suivantes :

$$(76) \quad \frac{dL\mathcal{G}}{ds} = \frac{4\pi i}{E_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} U_0} :$$

$$\vec{E}_0 = -\text{grad } U_0 = \frac{dU_0}{ds} ;$$

où ds désigne l'abscisse curviligne comptée le long d'une ligne de champ.

Nous obtenons ainsi une fonction $\mathcal{G}(x, y)$ définissant un fond modelé. Si nous le matérialisons, nous avons à la surface libre de l'électrolyte la distribution du potentiel U_0 donnée.

En utilisant ce résultat, nous pouvons résoudre le problème posé de la façon suivante. On part d'une cuve à fond plan, respectant dans le plan $\mathcal{G} = 0$ les conditions aux limites, et l'on relève la distribution du potentiel U_1 à la surface de l'électrolyte. Cette distribution vérifie l'équation $\Delta U_1 = 0$. À partir de U_1 et des densités de courant sur la cathode, on déduit, par l'intermédiaire de la connaissance des trajectoires électroniques, une répartition de la densité de courant i_1 et du champ électrique E_1 .

L'application de la relation (76) permet de réaliser un fond modelé. De la distribution du potentiel U_2 , déterminée expérimentalement à la surface de la cuve dans cette deuxième approximation, on déduira des trajectoires, des densités de courant et ainsi de suite.

Si la série des approximations converge, nous trouverons, comme pour la première méthode, des fonctions U'_0 , ρ' et i' qui vérifieront le système (72), (73), (74). Si la solution est unique, le problème sera alors résolu.

Dans ce qui suit, nous distinguerons, pour des raisons de simplicité des formules à employer, les systèmes de révolution et les systèmes d'électrodes cylindriques à génératrices parallèles.

1° *Systèmes de révolution.* — Il est tout indiqué dans ce cas d'utiliser les coordonnées cylindriques r , θ , z , l'axe des z coïncidant avec l'axe de révolution.

Supposons que les électrons soient émis par une cathode avec une vitesse initiale négligeable et choisissons comme potentiel zéro celui de cette cathode.

Au point M de potentiel U_0 positif peuvent passer plusieurs trajectoires électroniques 1, 2, 3... ; elles correspondent à des densités de charge $-\rho_1$, $-\rho_2$, $-\rho_3$,..., et à des densités de courant de valeurs arithmétiques i_1 , i_2 , i_3 ,... respectivement ; mais tous les électrons ont en M la même vitesse V définie par :

$$(73) \quad \frac{1}{2} m v^2 = e U_0$$

(— e et m étant respectivement la charge et la masse de l'électron).

On en déduit :

$$\begin{aligned} i_1 &= \rho_1 v \\ i_2 &= \rho_2 v \\ i_3 &= \rho_3 v \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La densité de charge totale $-\rho$ est égale à $-(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots)$.

Désignons par i la somme arithmétique :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots$$

De ce qui précède résulte la relation :

$$(74) \quad i = \rho v$$

En éliminant ρ et v entre les équations (72), (73), (74), nous obtenons :

$$(75) \quad \Delta U_0 - \frac{4\pi i}{\sqrt{\frac{2e}{m}} U_0} = 0,$$

ou en explicitant ΔU_0 en coordonnées cylindriques :

$$(76) \quad \frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} - \frac{4\pi i}{\sqrt{\frac{2e}{m}} U_0} = 0.$$

Dans la cuve électrolytique, le potentiel U est, au contraire, défini par l'équation :

$$(77) \quad \Delta U = 0,$$

ou en coordonnées cylindriques :

$$(78) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0.$$

Nous pouvons remarquer que l'équation (76) ne dépend que de deux paramètres r et z , alors que l'équation (78) dépend de trois ; r , θ , z . Nous allons utiliser ce fait pour établir une correspondance

entre le terme $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$ de l'équation (78) et le terme $-\frac{4\pi i}{\sqrt{\frac{2e}{m}} U_0}$ de l'équation (76). Nous montrerons, à

l'aide de développements en série, que l'on peut déterminer des électrodes et un relief du fond de la cuve de manière que la distribution U_0 , donnée a priori, se trouve réalisée à la surface libre du liquide.

Choisissons cette surface comme plan de coordonnées xOz de façon que son équation soit :

$$\theta = 0$$

et supposons qu'on ait su résoudre le problème posé.

Pour des valeurs de θ assez petites et sous réserve que les dérivées successives $\frac{\partial^n U}{\partial \theta^n}$ existent, le poten-

tiel U peut être représenté par un développement en série en fonction de θ , dont le terme constant traduit précisément la distribution superficielle donnée, soit :

$$(79) \quad U(r, \theta, z) = U_0(r, z) + U_1(r, z) \theta + U_2(r, z) \theta^2 + U_3(r, z) \theta^3 + U_4(r, z) \theta^4 + \dots U_n(r, z) \theta^n + \dots,$$

où les coefficients U_0 , U_1 , U_2 ,..., sont à déterminer. Pour cela nous comparerons les équations (76) et (78) compte tenu de (79), ce qui donnera des relations de récurrence ; les conditions sur la surface libre de l'électrolyte et sur le fond modelé achèveront de les déterminer.

A. *Comparaison des équations.* — De (79) on déduit :

$$(80) \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = U_1 + 2U_2\theta + 3U_3\theta^2 + 4U_4\theta^3 + \dots + (n+1) U_{n+1} \theta^n$$

et :

$$(81) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 2U_2 + 6U_3\theta + 12U_4\theta^2 + \dots + (n+1)(n+2)U_{n+2}\theta^n.$$

En portant les développements (79) et (81) dans l'équation de Laplace (78), nous obtenons :

$$\left(\Delta U_0 + \frac{2}{r^2}U_2\right) + \left(\Delta U_1 + \frac{6}{r^2}U_3\right)\theta + \dots + \left[\Delta U_n + (n+1)(n+2)\frac{U_{n+2}}{r^2}\right]\theta^n + \dots = 0.$$

D'où, en annulant chacun des coefficients de θ :

$$(82) \quad \Delta U_0 + \frac{2U_2}{r^2} = 0,$$

$$(83) \quad \Delta U_1 + \frac{6U_3}{r^2} = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(84) \quad \Delta U_n + (n+1)(n+2)\frac{U_{n+2}}{r^2} = 0.$$

B. Condition à la surface libre de l'électrolyte. — Le champ électrique à la surface libre de l'électrolyte étant tangent à celui-ci, la composante radiale

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \text{ est nulle pour } \theta = 0.$$

L'équation (80) permet d'en déduire :

$$U_1 = 0.$$

Il résulte alors de l'équation (83) :

$$U_3 = 0.$$

On démontre ainsi de proche en proche que tous les coefficients U_n d'indice impair sont nuls.

Le développement (79) se réduit donc à :

$$(85) \quad U = U_0 + U_2\theta^2 + U_4\theta^4 + \dots + U_{2p}\theta^{2p} + \dots$$

U_0 étant connu, U_2 est déterminé par l'équation (82) et ainsi de suite. Les composantes du champ électrique en un point sont :

$$(86) \quad E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial U_0}{\partial r} - \theta^2 \frac{\partial U_2}{\partial r} - \theta^{2p} \frac{\partial U_{2p}}{\partial r} \dots$$

$$(87) \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{2U_2}{r}\theta - 2p\frac{U_{2p}}{r}\theta^{2p-1} \dots$$

$$(88) \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial U_0}{\partial z} - \theta^2 \frac{\partial U_2}{\partial z} - \theta^{2p} \frac{\partial U_{2p}}{\partial z} \dots$$

La présence du fond de la cuve impose une condition aux limites, qui diffère suivant la nature de ce fond.

C. Fond isolant. — Soit $\theta = \theta(r, z)$ l'équation du fond de la cuve ; si le fond est isolant, sa surface est en chacun de ses points tangente au champ en ce point.

Les paramètres directeurs de la normale au fond étant $\frac{\partial \theta}{\partial r}$, $-\frac{1}{r}$, $\frac{\partial \theta}{\partial z}$, cette condition s'exprime par :

$$(89) \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} \cdot \frac{\partial U_0}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial U_0}{\partial z} - 2\frac{U_1}{r^2}\theta$$

$$+ \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial z} - 4\frac{U_4}{r^2}\theta\right)\theta^2 + \dots$$

$$+ \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \cdot \frac{\partial U_{2p}}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial U_{2p}}{\partial z} - 2p\frac{U_{2p}}{r^2}\theta\right)\theta^{2p} \dots = 0,$$

ou, compte tenu de (84) :

$$(90) \quad -\frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial r}\frac{\partial U_0}{\partial r} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial U_0}{\partial z} - \theta\frac{\partial \theta}{\partial r}\frac{\partial U_2}{\partial r} - \theta\frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial U_2}{\partial z} \dots = \Delta U_0 - \frac{\theta^2}{2.3}\Delta(r^2\Delta U_0).$$

Désignons par :

$\vec{E}_0 = \text{grad } U_0$ le champ électrique à la surface du liquide, et posons :

$$\vec{E}_n = \text{grad } U_n.$$

L'équation (90) devient :

$$(91) \quad \vec{E}_0 \cdot \text{grad } \text{Log } \theta + \vec{E}_2 \cdot \theta \text{ grad } \theta_0 + \dots = -\Delta U_0 + \frac{\theta^2}{2.3}\Delta(r^2\Delta U) + \dots$$

Dans toutes les régions où le potentiel peut effectivement être représenté par un développement du type (79), il est possible, en prenant θ suffisamment petit, de réduire chacun des membres de l'équation (91) à son premier terme, d'où :

$$(92) \quad \vec{E}_0 \cdot \text{grad } \text{Log } \theta = -\Delta U_0.$$

Soit s l'arc d'une ligne de champ de la surface du liquide compris entre une origine arbitraire M_0 et le point courant M (fig. 30).

L'équation (92) est équivalente à :

$$E_0 \cdot \frac{d \text{Log } \theta}{ds} = -\Delta U_0,$$

E_0 étant la valeur algébrique du champ comptée positive dans le sens des s croissants, ou :

$$(93) \quad \frac{d \text{Log } \theta}{ds} = -\frac{\Delta U_0}{E_0}.$$

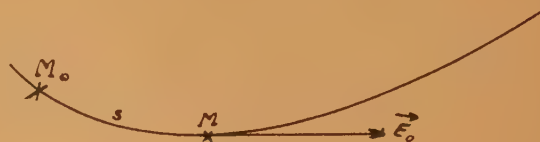


FIG. 30.

Nous avons ainsi trouvé l'équation intrinsèque du fond, exprimée à l'aide de données relatives à la surface du liquide.

En particulier, s'il s'agit de reproduire la distribution de potentiel dans le faisceau électronique étudié, l'équation (93) s'écrit, compte tenu de la relation (76), déduite de l'équation de Poisson :

$$(94) \quad \frac{d \text{Log } \theta}{ds} = -\frac{4\pi i}{E_0 \sqrt{\frac{2e}{m} U_0}}.$$

L'équation (93) ou (94) définit en chaque point l'angle θ à une constante multiplicative près ; celle-ci se trouve définie si l'on se donne arbitraire-

ment la valeur de θ en un point de chaque ligne de champ.

D. *Fond infiniment conducteur.* — La condition aux limites imposées est :

$$U = Cte.$$

Compte tenu du développement (85) limité à ses deux premiers termes et des relations (84), l'équation du fond est :

$$(95) \quad U = U_0(r, z) - \frac{\Delta U_0}{2} r^2 \theta^2 = Cte.$$

En particulier pour le faisceau électronique obéissant à la relation (76) l'équation précédente devient :

$$(96) \quad U_0(r, z) - \frac{2\pi i}{\sqrt{\frac{2e}{m} U_0}} r^2 \theta^2 = Cte.$$

Enfin, l'équation (95) montre que les électrodes peuvent, pour des valeurs de θ suffisamment faibles, être réduites à des portions de cylindres à génératrices parallèles à Oy. Elles ont pour traces sur le plan xOz les traces correspondant aux électrodes dans le faisceau électronique et sont portées aux potentiels respectifs de celles-ci ou à des potentiels proportionnels.

Électrodes cylindriques à génératrices parallèles. — Il est avantageux de choisir dans ce cas les coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z (fig. 29).

A. *Fond isolant.* — Le calcul, mené de façon analogue, conduit à remplacer la formule (91) relative aux coordonnées cylindriques par :

$$(97) \quad \vec{E}_0 \cdot \vec{\text{grad}} \log y + (\vec{E}_2 \cdot \vec{\text{grad}} y) y + \dots \\ = -\Delta U_0 + \frac{y^2}{6} \Delta(\Delta U_0) + \dots$$

On en déduit comme précédemment, en se limitant aux premiers termes, l'équation différentielle qui définit le fond isolant :

$$(98) \quad \frac{d \log y}{ds} = \frac{-4\pi i}{E_0 \sqrt{\frac{2e}{m} U_0}}$$

ou

$$\log \frac{y}{y_0} = \int_{s_0}^s \frac{-4\pi i}{E_0 \sqrt{\frac{2e}{m} U_0}} ds.$$

B. *Fond conducteur.* — L'équation (95) qui définit le fond conducteur est remplacée par :

$$U = U_0(x, z) - \frac{\Delta U_0}{2} (x, z) y^2 = Cte,$$

ou, en explicitant $U_0(x, z)$:

$$(99) \quad U = E_0 x + ax^2 + bxz + cz^2 - \frac{\Delta U_0(xz)}{2} y^2 = Cte.$$

Unicité de la solution.

En résumé, pour obtenir à la surface du liquide une distribution U_0 donnée, il est nécessaire que le fond, les électrodes, les tensions soient définis comme il vient d'être indiqué.

Réciproquement, si nous modelons le fond de la cuve électrolytique suivant un relief défini par l'une des équations (93), (95), (98) ou (99), si nous disposons les électrodes précédentes portées aux potentiels appropriés, nous obtenons effectivement la distribution superficielle U_0 cherchée. C'est là une application classique du théorème de Green :

Supposons que, les conditions précédentes étant réalisées, nous obtenions dans l'électrolyte une distribution de potentiel $U'(r, \theta, z)$.

Celle-ci satisfait à l'équation de Laplace :

$$\Delta U' = 0$$

et aux conditions aux limites :

— sur chacune des électrodes

$$U' = Cte;$$

— en tout point d'une surface isolante S limitant l'électrolyte, le champ électrique

$$\vec{E}' = -\vec{\text{grad}} U'$$

est tangent à celle-ci.

Il en résulte que le potentiel

$$V = U' - U$$

satisfait aussi à l'équation de Laplace, et qu'il est nul sur les électrodes.

Le champ électrique correspondant

$$\vec{F} = \vec{E}' - \vec{E}$$

est en chaque point de S tangent à cette surface.

Dans ces conditions le champ $\vec{F}$ est nul en tout point de l'électrolyte. En effet, le flux du vecteur $\vec{VF}$ à travers la surface fermée qui limite l'électrolyte est nul (fig. 31).

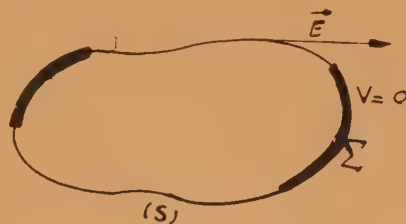


FIG. 31.

(Sur les parties conductrices Σ de cette surface, V est nul ; sur les parties isolantes $\vec{F}$ est tangent).

D'après le théorème de Green nous pouvons donc écrire :

$$\iiint_{\tau} \text{div } \vec{VF} d\tau = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tout le volume τ de l'électrolyte.

On en déduit :

$$(100) \quad \iiint_{\tau} \text{grad } \vec{VF} d\tau \\ + \iiint_{\tau} V \cdot \text{div } \vec{E} d\tau = 0.$$

La deuxième intégrale est nulle par suite de l'équation de Laplace :

$$\Delta V = \text{div } \vec{F} = 0.$$

La relation (100) s'écrit donc :

$$\iiint \text{grad } V \cdot \vec{F} \cdot d\tau \equiv \iiint F^2 \cdot d\tau = 0.$$

On en déduit :

$$\vec{F} = 0$$

en tout point du volume considéré. Le potentiel $V = U' - U$ a donc une valeur constante, qui ne peut être que 0 par suite des conditions aux limites.

La distribution U' est donc identique à la distribution U et fournit en particulier, à la surface du liquide, la distribution U_0 cherchée.

Examen particulier de la méthode au voisinage d'une cathode.

La méthode précédente repose essentiellement sur la possibilité de développer U en série entière par rapport à θ (ou à z). Or cette possibilité n'existe pas au voisinage d'une cathode émettant des électrons sans vitesse initiale : en effet, d'après la relation :

$$\rho = \frac{i}{v}$$

la densité de charge ρ y est infinie. Il en résulte que le laplacien ΔU_0 est infini.

Si, d'autre part, il existe dans le liquide une distribution de potentiel U s'identifiant à U_0 à la surface libre, son laplacien a pour expression au voisinage de celle-ci :

$$\Delta U = \Delta U_0 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0.$$

ΔU_0 étant infini, il en est de même de $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$ (ou $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ en coordonnées cartésiennes).

Notre méthode de développement en série n'est donc pas applicable au voisinage d'une cathode. Il est par conséquent nécessaire de trouver dans cette région un autre procédé pour définir dans l'électrolyte les conditions aux limites appropriées.

Il nous faut pour cela préciser les propriétés émissives de la cathode. Nous nous bornerons à examiner le cas où le courant électronique émis est limité par la charge d'espace : c'est là un cas idéal dont on s'éloigne plus ou moins en pratique, mais qui constitue une première approximation commode pour représenter le comportement des cathodes à oxydes.

Il est caractérisé par le fait que le champ électrique est nul en tout point infiniment voisin de la cathode.

Dans ces conditions, il est bien connu que, si la cathode est plane, illimitée, et située en face d'une anode plane, illimitée et parallèle, la distribution de potentiel est de la forme :

(Loi de Langmuir)

$$U = \frac{(9\pi i)^{2/3}}{\left(\frac{2e}{m}\right)^{1/3}} z^{4/3} = k z^{4/3},$$

k étant indépendant de z .

Cette loi peut être appliquée au cas d'une cathode plane, illimitée, associée à des électrodes quelconques, si l'on se borne à considérer une région suffisam-

ment voisine de la cathode (bords exclus pour que les surfaces équipotentielles puissent y être consi-

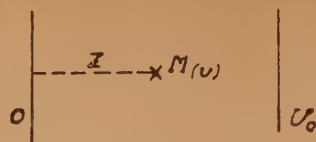


FIG. 32.

dérées comme planes (fig. 32)). La distribution de potentiel U_0 dans le plan incident xOz ne dépend plus de x ; nous sommes ainsi ramenés à un problème classique : trouver une distribution spatiale harmonique U satisfaisant dans le plan xOz aux conditions suivantes :

U s'identifie à une fonction $U_0 = f(z)$ indépendante de z ;

le champ électrique correspondant à U est contenu dans ce plan.

Il est aisé de vérifier [18] que la partie réelle de la fonction

$$U(y, z) = f(z + iy)$$

satisfait à ces conditions :

1° On voit par simple dérivation que Δf est nul ; on en déduit aussitôt :

$$\Delta u = 0 ;$$

2° D'autre part, en deux points symétriques par rapport à xOz , les valeurs de f sont imaginaires conjuguées, les valeurs de u sont donc égales. La distribution de potentiel U ainsi trouvée étant symétrique par rapport à xOz , il résulte que le champ électrique en un point de ce plan est effectivement contenu dans ce plan (sous réserve qu'il soit continu).

Dans le problème particulier qui nous occupe, la distribution U est donc définie par :

$$U = k \text{ partie réelle } (z + iy)^{4/3},$$

ou en coordonnées polaires R, φ dans le plan yOz (fig. 33) :

$$U = k R^{4/3} \cos \frac{4\varphi}{3}.$$



FIG. 33.

Pour assurer l'uniformité de U et sa continuité à travers le demi-axe Oz , on choisira la détermination de φ comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

Nous obtenons ainsi une distribution satisfaisant, pour toute valeur positive de z , aux conditions imposées (fig. 34).

On remarque en particulier que l'équipotentielle 0 est constituée par les deux demi-droites :

$$\frac{4}{3} \varphi = \pm \frac{\pi}{2},$$

$$\varphi = \pm \frac{3}{8} \pi.$$

On peut aisément déterminer la ligne de champ

passant par un point R_0, φ_0 . Elle a pour équation :

$$R = R_0 \left(\frac{\sin \frac{4}{3} \varphi_0}{\sin \frac{4}{3} \varphi} \right)^{3/4}$$

Sur la figure 34 on a marqué en traits discontinus les lignes de champ ; celles qui correspondent à des

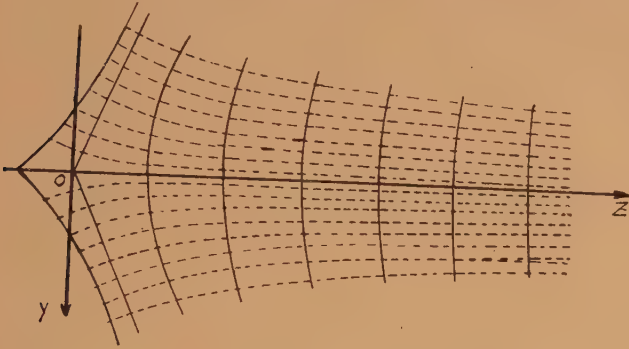


FIG. 34.

valeurs positives de z sont en même temps lignes de courant dans la cuve électrolytique.

Il est possible de généraliser la méthode précédente au cas d'une cathode plane associée à un ensemble d'électrodes quelconques [20].

Sur chaque normale à la cathode, le potentiel peut être représenté par un développement en série de z , de la forme :

$$U = \frac{(9\pi i_0)^{2/3}}{\left(2 \frac{e}{m}\right)^{1/3}} z^{4/3} (1 + \alpha z^{2/3} + \beta z + \gamma z^{4/3} + \dots).$$

Dans cette formule i_0 représente la densité de courant extraite de la cathode au point M_0 de la normale considérée.

$i_0, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ dépendent de la position de M_0 .

Le domaine de convergence de ce développement varie évidemment dans chaque cas particulier.

Quoi qu'il en soit, dans le voisinage immédiat de la cathode et pour chaque élément de celle-ci, la distribution de potentiel peut être sensiblement représentée par la loi de Langmuir avec une densité de courant i_0 variable d'un élément au voisin.

Étude des conditions de raccordement entre les régions à fond modelé et celles à fond plan. — Nous devons remarquer qu'il ne suffit pas de raccorder à la surface de l'électrolyte les valeurs du potentiel et de ses dérivés à la frontière du faisceau électronique, mais qu'il faut raccorder les surfaces équipotentiellles dans l'électrolyte, et que la continuité du champ le long d'une ligne de courant nécessite l'absence de toute discontinuité dans la profondeur de l'électrolyte le long de cette ligne.

En effet, cette discontinuité entraînerait une déformation des surfaces équipotentiellles S dans l'électrolyte, qui perturberait la distribution du potentiel à la surface. Nous avons représenté sur la figure 35 une coupe verticale d'un système de deux

électrodes planes perpendiculaires au plan de la coupe, et d'un fond de cuve plan présentant une discontinuité. Bien que le fond de la cuve soit plan, nous n'aurons pas à la surface une distribution linéaire du potentiel. La brusque variation de la hauteur de l'électrolyte en un point de la ligne de courant donne dans le plan de la figure des lignes

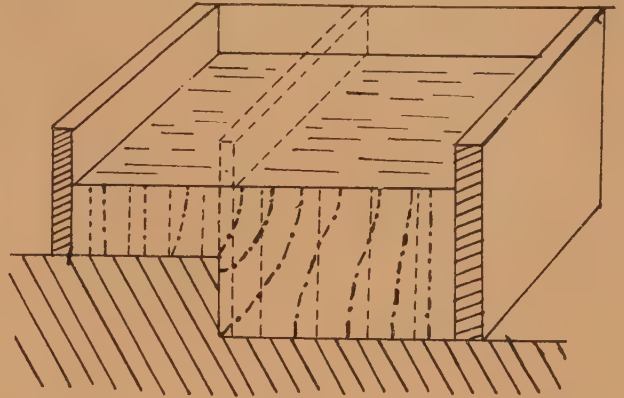


FIG. 35.

équipotentiellles figurées en traits mixtes. Si nous plaçons en AB une feuille plane conductrice assurant la continuité du potentiel dans le plan vertical AB, nous obtiendrions bien à la surface une distribution linéaire du potentiel (traits pointillés sur la figure 35), mais il est bien évident que le champ électrique ne serait pas le même de part et d'autre du plan AB. Nous serons donc conduits à limiter le fond modelé par une cloison isolante verticale, dont la trace sur la surface libre de la cuve coïncidera avec une ligne de champ électrique E . Pour diminuer le plus possible la région du fond modelé, nous choisirons pour E la ligne de champ tangente extérieurement à la région du faisceau électronique. Nous devons remarquer que dans les régions de très forte densité de charge d'espace, les surfaces équipotentiellles dans l'électrolyte sont loin d'être planes (fig. 34). Le raccordement ne peut se faire dans de bonnes conditions que près de la surface. On placera donc à la limite du faisceau une petite plaque isolante P (fig. 36) dans les régions où la tangente au fond isolant ne fait pas un angle très petit avec le plan horizontal.

Application à la cuve électrolytique.

Ce qui précède montre que l'on peut trouver un fond de cuve donnant à la surface la distribution cherchée, mais ceci n'est utilisable que dans la mesure où nous pourrions faire une homothétie sur la structure, conservant les trajectoires électroniques. Nous pouvons remarquer que l'état du faisceau est entièrement déterminé par :

A) les équations de l'électricité :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} U, \quad \text{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \vec{i} = \rho \vec{V}, \quad \text{div} \vec{i} = 0;$$

B) les équations de la mécanique.

Celles-ci s'appliquent à un électron déterminé et expriment la loi de son mouvement en fonction de

la durée de transit τ qui s'est écoulée entre l'instant t_0 où l'électron quitte la cathode et l'instant t considéré. Ces équations sont :

$$\vec{V} = \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \tau} \right)_{t_0}, \quad -e\vec{E} = m \left(\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial \tau^2} \right)_{t_0}$$

Considérons maintenant un faisceau dont l'état se déduirait du précédent par les formules de proportionnalité suivantes :

$$\vec{i}' = h \vec{i}, \quad \vec{M}' = a \vec{M}, \quad U' = bU, \quad \vec{E}' = c \vec{E}, \\ \vec{V}' = f \vec{V}, \quad \rho' = g\rho, \quad t' = kt.$$

Pour qu'un tel faisceau soit susceptible d'exister, il suffit que ces grandeurs satisfassent aux équations précédentes. On en déduit 5 relations entre les 7 coefficients introduits :

$$c = \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{a} = g, \quad h = fg, \quad \frac{h}{a} = \frac{g}{k}, \quad c = \frac{a}{h_2}$$

Si nous gardons les tensions et effectuons une homothétie de rapport n sur les longueurs, nous posons $b = 1$, $a = n$. On trouve alors $c = n^{-1}$, $f = 1$, $g = n^{-2}$, $h = n^{-2}$, $k = n$ et la relation (98) devient :

$$\frac{dLy}{ds'_{cm}} = -1,9.10^5 \frac{i'_{A/cm^2}}{E'_{V/cm} \sqrt{U'_{V}}} \\ = -\frac{1,9.10^5}{n} \frac{i_{A/cm^2}}{E_{V/cm} \sqrt{U_V}},$$

où i' , E' , U' , s' sont les valeurs correspondant au modèle à l'échelle n , et i , E , U , s les valeurs correspondant au tube à vide.

Il résulte de ce qui précède que nous obtiendrons une représentation correcte de la distribution de potentiel U_0 au voisinage d'une cathode plane en disposant dans la cuve électrolytique les éléments suivants :

— une paroi plane parfaitement conductrice, inclinée à $\frac{3}{8}\pi$, matérialisant une partie de l'équipotentielle zéro, et flanquée sur ses côtés de petites

feuilles isolantes ;

— un fond isolant matérialisant des lignes de champ de la figure 34.

Naturellement à partir d'une certaine cote Z_0 qui dépend du cas étudié, la loi de Langmuir ne peut plus être considérée comme satisfaisante et le profil du fond ne se trouve plus défini par la méthode précédente. On devra choisir la profondeur des lignes de champ utilisées dans cette méthode, assez faible pour qu'à une cote Z'_0 inférieure à Z_0 on se trouve déjà dans les conditions d'application de la méthode générale exposée précédemment. Or, d'après cette méthode, il est clair que la distribution de potentiel et de champ en un point $M(x, y, z)$ de l'électrolyte se trouve définie sans ambiguïté (si y est assez petit) par la connaissance de la distribution superficielle au voisinage du plan xOz .

Il en résulte que dans la région comprise entre

les cotes z'_0 et z_0 les distributions de potentiel et de champ données par la méthode de Pierce s'identifient nécessairement aux distributions obtenues par notre méthode générale ; on en déduit la continuité des distributions obtenues de part et d'autre de tout plan de cote z comprise entre z_0 et z'_0 ; en particulier, les profils du fond isolant de part et d'autre de ce plan se raccordent tangentiellement.

Méthode d'application des résultats précédents.

Les résultats qui viennent d'être démontrés permettent de résoudre le problème électronique initialement posé, grâce à une méthode d'approximations successives.

1° On dispose dans la cuve électrolytique des électrodes métalliques représentant, à une échelle agrandie, les électrodes réelles, à l'exception de la partie cathodique susceptible d'émettre des électrons ; à celle-ci on fait correspondre une électrode ayant pour trace sur la surface du liquide sa propre

trace, mais inclinée à $\frac{3\pi}{8}$ sur l'horizontale (fig. 36)

et flanquée sur ses côtés de petites feuilles isolantes.

On examine ensuite dans la cuve si l'équipotentielle zéro possède des branches distinctes de la cathode et on les détermine éventuellement de façon à définir en première approximation les parties émissives de la cathode.

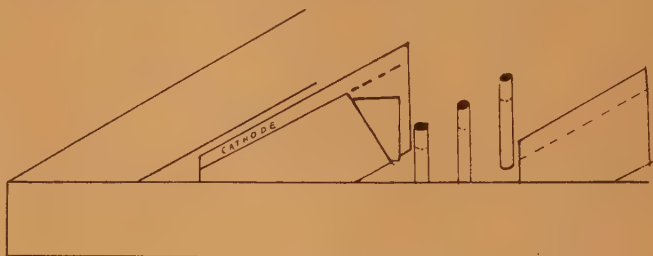


FIG. 36.

2° On retouche la région cathodique en ne laissant des électrodes inclinées à $\frac{3\pi}{8}$, avec leur isolant, que devant les parties émissives de la cathode précédemment définies, les autres parties étant représentées par des électrodes verticales (fig. 37).



Fig. 37.

On effectue alors le tracé classique des lignes équipotentielles.

On en déduit des lignes de champ et des trajectoires électroniques, en remarquant que le coefficient a dont il a été question dans le tracé des trajectoires n'est plus défini par la même relation que dans le cas où l'on néglige la charge d'espace.

En effet, nous avons maintenant :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = 4\pi\rho = 2(a + c) + \frac{E_1}{l},$$

d'où :

$$a = -\frac{E_1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{l} \right) + \frac{4\pi i}{\sqrt{\frac{2e}{m}} U}.$$

On peut alors calculer la variation relative de la densité de courant le long de ces dernières. Pour la connaître en valeur absolue, on détermine la densité du courant aux points correspondants de la cathode. On peut déduire celle-ci, par exemple, de la variation du potentiel au voisinage de la cathode, le long d'une ligne de champ, par application de la loi limite de Langmuir.

Il est commode, à cet effet, de tracer la courbe $U^{3/4}$ en fonction de s . On détermine ensuite son coefficient angulaire pour $s = 0$, d'où l'on déduit i , ce qui a pour avantage d'éliminer les erreurs commises sur la position de l'équipotentielle zéro, difficile à déterminer expérimentalement.

L'ensemble des opérations précédentes fournit donc des valeurs approchées du potentiel U_0 , du champ E_0 et de la densité de courant i en un nombre de points aussi grand qu'on le désire.

On utilise ces valeurs pour calculer un relief de fond de cuve suivant une des formules (94), (96), (98), (99) et au voisinage de la cathode ; on utilise un relief déduit de la figure 34.

3° On dispose dans la cuve le relief précédent. On recommence le tracé des lignes équipotentielles et on obtient des valeurs améliorées de U , E_0 et i .

Ces valeurs conduisent elles-mêmes à une délimitation plus précise des parties émissives de la cathode et à un relief de deuxième approximation.

4° On recommence de même avec ce nouveau relief et ainsi de suite, jusqu'à ce que les éléments correspondant à deux approximations consécutives soient identiques, à la précision cherchée.

CHAPITRE III

APPLICATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS

A DES STRUCTURES ÉLECTRONIQUES

SOMMAIRE. — Pour mettre en évidence la convergence des approximations successives, indépendamment du tracé des trajectoires, nous étudierons la distribution du potentiel entre une cathode plane infinie et une anode plane et parallèle à la cathode. Cette distribution, en supposant que l'émission soit limitée par la charge d'espace, a été déterminée par Langmuir. Nous traiterons ensuite un cas plus général, qui fait intervenir la construction des trajectoires électroniques, mais dont la solution a été déterminée exactement par ailleurs, de façon à mieux illustrer la précision de la méthode.

Étude de la distribution du potentiel entre deux électrodes planes, parallèles et infinies, l'émission cathodique obéissant à la loi de Langmuir. — Nous

obtiendrons évidemment ici la distribution du potentiel en appliquant la méthode particulière des fonctions conjuguées, non seulement au voisinage de la cathode, mais sur toute l'étendue de la cuve, l'intensité du courant émis par la cathode étant obtenue par application de la loi de Langmuir. Cependant, notre but étant de montrer l'application de la méthode générale, nous renoncerons à ces facilités et ne retiendrons les résultats précédents que pour des distances à la cathode inférieures à 0,05 de la distance entre les électrodes. L'intensité du courant est déduite, dans chaque approximation, de la distribution du potentiel. Il résulte de la nature du problème que les lignes de champ sont des droites perpendiculaires aux électrodes et que les trajectoires électroniques sont constamment normales à la cathode, quelle que soit la distribution du potentiel.

Détermination du profil du fond.

Sauf pour la première approximation où nous partons du fond plan, nous avons vu que toutes les cotes du fond étaient déterminées par rapport à la cote d'un point (98) et que les résultats obtenus n'étaient applicables que si les cotes du fond restaient toujours très petites. Du point de vue pratique il est évident que l'épaisseur de l'eau ne peut pas être infiniment petite et que les erreurs sur la réalisation du fond modelé auront d'autant moins d'importance que l'épaisseur de l'eau sera plus grande. Il existe donc un compromis. Pour avoir une idée des épaisseurs d'eau à utiliser, on peut déterminer par la relation (98) l'équation du fond correspondant en surface à la distribution de Langmuir et calculer l'influence du premier terme négligé dans les développements qui ont conduit à cette relation. Dans le cas envisagé, le potentiel et les grandeurs en dérivant ne dépendent que d'une variable : l'abscisse s d'un point M compté sur une ligne de champ à partir de la cathode.

Si nous désignons par U le potentiel au point courant M, par U_1 le potentiel de l'anode distante de s_1 de la cathode, nous avons :

$$U = U_1 \left(\frac{s}{s_1} \right)^{4/3} \quad (\text{loi de Langmuir}).$$

Considérons l'équation (98) :

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{\text{grad}} Ly + (\vec{E}_2 \cdot \vec{\text{grad}} y)y + \dots = -\Delta U_0 + \frac{y^2}{6} \Delta(\Delta U_0) + \dots$$

Nous voyons que nous pouvons exprimer E_0 , E_2 , U_0 , ..., en fonction de s . On en déduit :

$$\frac{d \text{Log } y}{ds} = -\frac{1}{3s} \left(1 - \frac{4}{54} \left(\frac{y}{s} \right)^2 + \dots \right).$$

Effectuons le changement de variable $k = z/s$:

$$\frac{d \text{Log } k}{ds} = -\frac{4}{3s} \left(1 - \frac{k^2}{54} + \dots \right)$$

ce qui donne en intégrant et en tenant compte des

conditions initiales $y = y_0$ pour $s = s_0$:

$$\text{Log} \left(\frac{s}{s_0} \right)^{-1/3} = \text{Log} \frac{y}{y_0} + \frac{1}{108} \left[\left(\frac{y}{s} \right)^2 - \left(\frac{y_0}{s_0} \right)^2 \right] + \dots$$

où y_0 est la cote du fond en un point d'abscisse s_0 .

Si nous comparons cette relation à celle déduite de l'application de la relation (98) :

$$\text{Log} \left(\frac{s}{s_0} \right)^{-1/3} = \text{Log} \frac{y'}{z_0}$$

Nous voyons donc qu'à une distance de la cathode égale aux 5/100 de la distance entre les électrodes (10 mm dans le cas envisagé), l'erreur $\Delta y/y \simeq 10^{-1}$ et $\Delta y \simeq 3 \text{ mm}$, ce qui est déjà important.

Si pour $s_0 = 200 \text{ mm}$ nous prenons $y_0 = 5 \text{ mm}$, les erreurs $\Delta y/y$ sont toutes divisées par 4 et les erreurs absolues Δy divisées par 8, ce qui correspond pour $s = 1 \text{ cm}$ à $\Delta y \sim 0,4 \text{ mm}$.

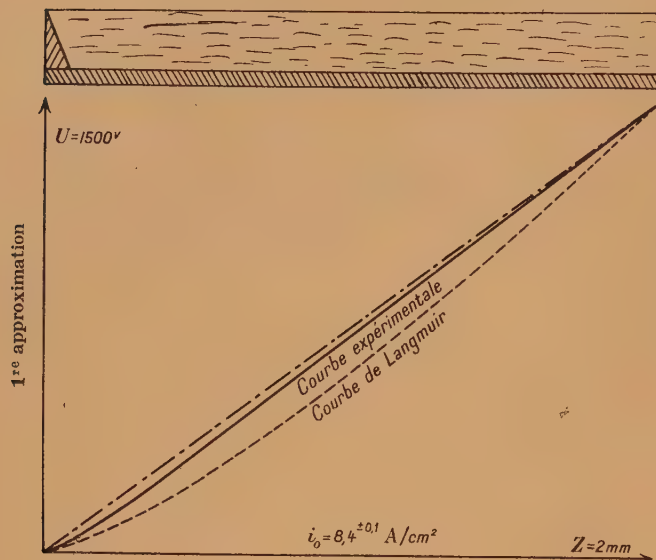


FIG. 38.

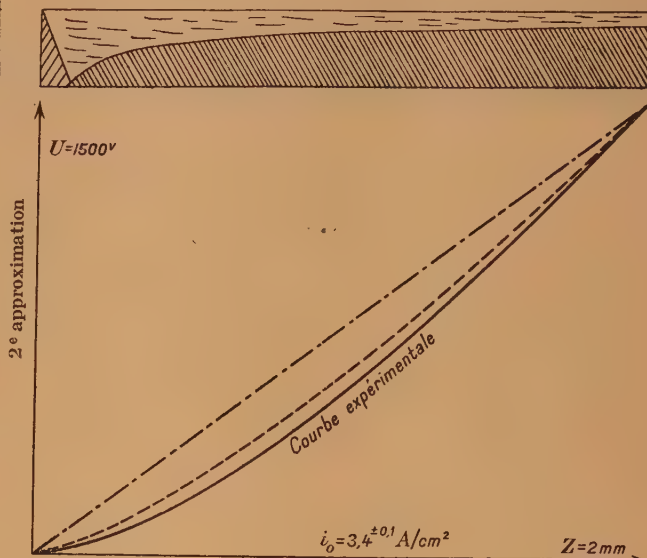


FIG. 39.

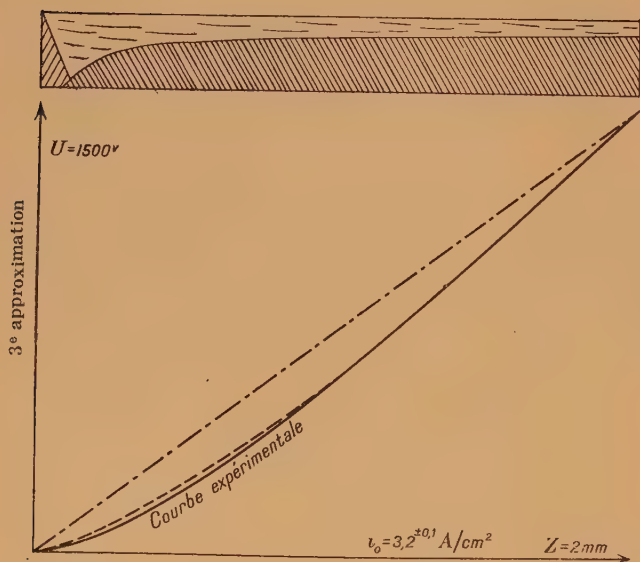


FIG. 40.

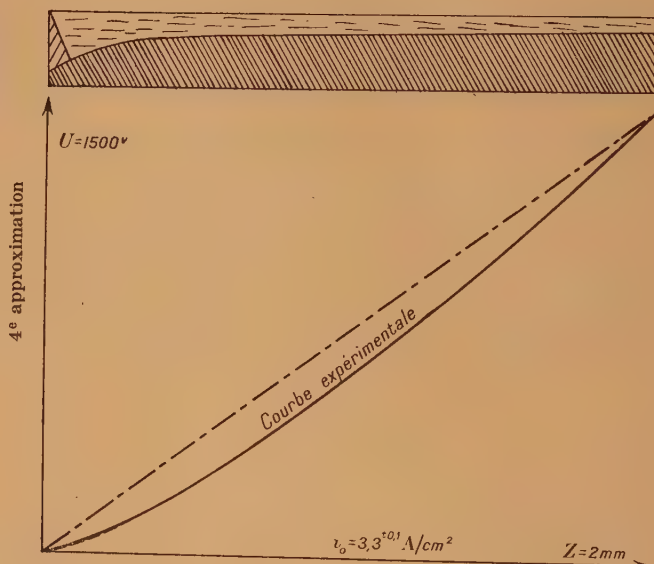


FIG. 41.

nous pouvons mettre en évidence l'erreur $\Delta y = y' - y$ commise sur un point du profil :

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{108} \left(\frac{y_0}{s_0} \right)^2 \left[\left(\frac{s_0}{s} \right)^{8/3} - 1 \right].$$

Si nous prenons $s_0 = 200 \text{ mm}$, distance entre les deux électrodes, et $y_0 = 10 \text{ mm}$, nous avons :

s en millimètres	$\Delta y/y$
2	5,35
4	0,84
6	0,28
8	0,13
10	0,08
20	0,01
60	0,0004

Nous adopterons donc pour $s_0 = 200 \text{ mm}$ une hauteur d'eau minimum de 5 mm.

Réalisation du fond.

Ces essais ayant pour but d'illustrer la méthode des approximations successives, nous avons réalisé les fonds avec la plus grande précision possible, bien que les procédés employés dans ce cas particulier ne soient pas utilisables dans le cas général.

Nous avons utilisé une petite cuve en verre ayant 20 cm de longueur sur 2 cm de largeur. Pour réaliser les fonds, nous avons découpé, dans de la tôle bleue,

deux profils correspondant au fond donné. Nous avons serré entre les deux profils un bloc d'aubanite coulé dans la petite cuve et éliminé l'excédent d'aubanite en grattant au couteau, ce qui permet de réaliser le fond avec une précision supérieure à 0,05 mm. Les électrodes étaient en nickel et la cuve, remplie d'eau de la ville, comme il a été indiqué par Mr MALAVARD, était alimentée à 50 périodes/seconde. Nous avons remarqué qu'il était très important que l'électrolyte ne se glisse pas entre les parois du profil et celles de la cuve, sinon les mesures sont nettement faussées par suite de fuites électriques.

Résultats expérimentaux.

Dans la première approximation, le fond isolant était plan et l'on plaçait dans la région de la cathode un fond conducteur incliné à $3\pi/8$ sur le plan horizontal.

Nous devons remarquer que si nous ne plaçons pas une électrode inclinée au voisinage de la trace de la cathode, nous ne pourrions pas déduire une densité de courant émise par la cathode fonctionnant en charge d'espace.

En effet la loi de Langmuir donne :

$$i = \frac{\epsilon_0}{9\pi} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{U^{3/2}}{d^2}.$$

Si l'on forme $U^{3/2}/d^2$ dans le cas du fond plan et des électrodes verticales, on trouve que $U^{3/2}/d^2$ augmente indéfiniment quand d tend vers 0, alors que dans le cas où nous mettons une électrode inclinée à la Pierce nous avons pour $U^{3/2}/d^2$ en fonction de d les valeurs suivantes :

d en millimètres	$U^{3/2}/d^2$
2	3,58
3	3,3
4	3,28
5	3,05
6	2,88
7	2,71
8	2,67
9	2,56
10	2,52

On voit que si $d \rightarrow 0$, $U^{3/2}/d^2 \rightarrow 3,7$, ce qui donne une densité de courant de 8,4 A/cm² au lieu de 3,45 A/cm² dans le cas de la loi de Langmuir, en prenant :

$$U_a = 1\,500 \text{ V},$$

$$d = 2 \text{ mm}$$

On calcule ensuite $\frac{d \text{ Log } y}{ds}$ pour différentes valeurs de s et l'on procède à une intégration graphique pour avoir y en fonction de s .

On détermine ainsi un profil dit de deuxième approximation et l'on recommence le cycle des opérations ; les résultats sont donnés dans les courbes des figures (38), (39), (40), (41).

Pour permettre la comparaison avec la courbe théorique, on a tracé cette dernière sur chacune des figures. De plus, on a représenté au-dessus de chaque courbe le fond qui lui a donné naissance et

indiqué la densité de courant i_a qui en a été déduite.

En vue d'étudier l'influence du remplissage de la cuve, une expérience préliminaire, sur un fond déduit de la loi de Langmuir à la surface, avait montré que le réglage était assez critique et devait être fait à moins de 0,1 mm pour que l'écart entre la courbe théorique et la courbe expérimentale soit inférieur à 0,3 mm. Dans ces conditions, nous n'avons aucune différence appréciable entre la courbe théorique et la courbe expérimentale.

ÉTUDE D'UN FAISCEAU A LA PIERCE

Introduction. — Dans l'exemple précédemment envisagé, les électrodes étaient des plans indéfinis et le faisceau électronique remplissait tout l'espace compris entre ces deux plans. Si la partie émissive de la cathode était de dimensions finies, les trajectoires électroniques ne seraient plus rectilignes. La charge d'espace provoquerait un épanouissement du faisceau. PIERCE a montré [19] que pour certaines formes d'électrodes on pouvait avoir un faisceau de dimensions finies, dont toutes les trajectoires électroniques sont rectilignes et perpendiculaires à la cathode, en supposant l'émission limitée par la charge d'espace. On obtient ce résultat en produisant avec des électrodes de forme convenable, dans la région libre de charges, une distribution du potentiel pouvant se raccorder, à la frontière du faisceau électronique, avec la distribution produite par la charge d'espace. Nous avons déjà utilisé cette méthode pour trouver un fond modelé au voisinage d'une cathode.

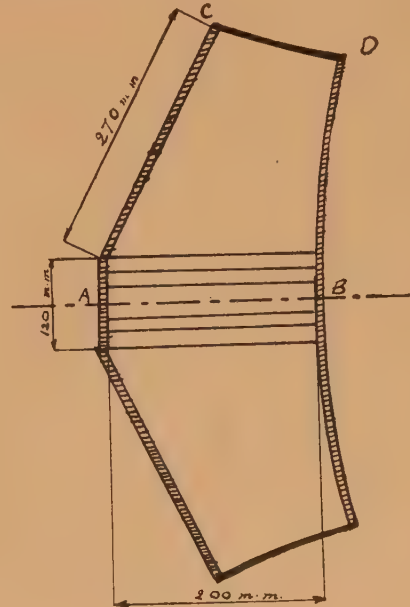


FIG. 42.

Ce cas (fig. 42) diffère du précédent, car, sauf dans la dernière approximation, les trajectoires des électrons ne seront pas normales à la cathode. Il sera nécessaire de les construire graphiquement. De plus, afin d'assurer les conditions de raccordement du potentiel dans la cuve, nous devrions

étendre le fond modelé à des régions extérieures au faisceau électronique, comme nous l'avons vu précédemment.

Principe. — Le système à étudier (fig. 42) présentant un plan de symétrie AB, nous ne représenterons à la cuve qu'une moitié de la structure, le plan AB étant figuré par un isolant. De plus, comme il n'est pas possible d'avoir des électrodes infinies, nous limiterons le contour en matérialisant par un isolant une ligne de champ (CD). La surface du fond dans les diverses approximations étant gauche, on ne peut utiliser les mêmes procédés de réalisation que dans le précédent exemple.

Pour faire ces fonds aussi rapidement que possible, nous procédons de la façon suivante : nous définissons un quadrillage dans le plan où nous étudions la distribution du potentiel en considérant, dans la région du faisceau, des lignes de champ et des équipotentiels, de telle sorte que les quadrilatères curvilignes ainsi formés aient des cotes de l'ordre de 20 mm (distance optimum pour avoir encore une bonne précision lors de la réalisation du fond, tout en diminuant le plus possible le nombre des profils à réaliser).

On détermine les cotes $y = f(x, z)$ du fond, suivant les lignes de champ précédemment envisagées, d'après la relation (98) intégrée graphiquement à partir des cotes Y le long d'une ligne coupant toutes les lignes de champ. On définit ensuite le fond par $Z' = f(x, z)$, où Z' est compté par rapport à un plan parallèle à la surface de l'eau, tel que leur distance soit supérieure à la plus grande valeur de la fonction y précédemment déterminée (de l'ordre de 5 à 10 mm pour qu'on puisse réaliser facilement le fond modelé). On trace sur des feuilles de carton bakélisé les différentes courbes $Z' = f(s)$ pour les différentes lignes de courant et l'on en déduit les courbes $Z' = f(l)$ pour les lignes équipotentiels qui complètent le quadrillage. On les découpe, les entaille de façon à les emboîter les unes dans les autres, et on les monte comme il est indiqué sur la figure 43. On coule ensuite de la paraffine de façon à réaliser le fond en grattant l'excédent de paraffine, la partie supérieure de l'armature en carton précédemment réalisée affleurant partout la surface ainsi matérialisée. On le munit ensuite, à la frontière du faisceau électronique voisine de la cathode, d'une petite plaque verticale isolante, comme il a déjà été indiqué.

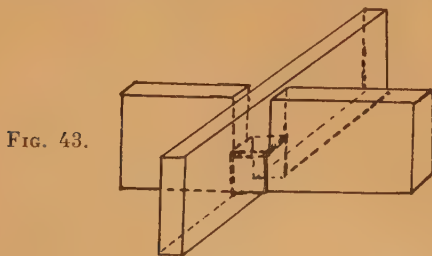


FIG. 43.

Condition de réalisation. — Cette armature est réalisée en carton bakélisé de 0,9 mm d'épaisseur,

qui, tout en présentant une certaine rigidité, peut être courbé facilement. De plus, on peut le découper à la cisaille à main et il est possible de faire des entailles de 0,9 mm. de largeur avec une scie à métaux.

Les profils peuvent être réalisés de la façon suivante : On découpe la feuille de carton en bandes de hauteur convenable (au massicot de préférence). On repère sur un arbre avec un trusquin un certain nombre de points du profil (et la position des entailles), on trace ce profil au pistolet, on le découpe à la cisaille et on le finit à la lime douce en contrôlant sur le marbre avec un trusquin au vingtième de millimètre. On pratique les entailles avec une scie à métaux en serrant le carton entre deux plaques métalliques servant de guides pour la scie et permettant de faire une entaille bien propre. On monte l'armature du fond, les pièces devant s'emboîter sans qu'on ait à forcer, pour ne pas être déformées.

On coule de la paraffine en grand excédent, pour tenir compte du retrait lors de la solidification, et on enlève l'excédent restant avec un grattoir.

Nous avons pris de la paraffine de préférence au tétrachloronaphtalène (aubanite), car la paraffine est beaucoup plus tendre et il importe, lors du grattage de l'excédent, de ne pas modifier la forme des profils en carton bakélisé. Cette structure, alourdie par le carton, ne présente pas l'inconvénient de flotter.

Les électrodes utilisées sont en laiton, recouvertes d'une très mince couche d'aquadag, ce qui a pour effet de réduire énormément la polarisation de l'électrolyte au voisinage de l'électrode, et par suite de diminuer la capacité parasite équivalente.

Pour avoir une idée de l'influence de la précision de la réalisation du fond sur la distribution du potentiel dans le cas où la hauteur d'eau minimum est de 5 mm, nous avons d'abord réalisé, sans de trop grands soins, un profil correspondant en surface à la distribution de Langmuir, ayant une largeur de 6 cm et une longueur de 20 cm.

L'essai de ce profil, limité sur les côtés par deux parois isolantes, dans la cuve électrolytique a montré que des erreurs sur la réalisation du fond pouvant aller jusqu'à 0,5 mm entraînent des erreurs de l'ordre de 1 mm sur la position d'un point M de potentiel donné. Une réalisation plus soignée (à moins de 0,1 mm environ) a donné la distribution de potentiel de Langmuir à moins de 0,2 mm sur la position du point M.

Première approximation. — On part d'une cuve à fond plat, sauf au voisinage de la cathode, où l'on place une électrode faisant l'angle $3\pi/8$ avec le plan horizontal et flanquée à la limite du faisceau électronique d'une petite feuille isolante destinée à permettre un raccordement correct des surfaces équipotentiels dans l'électrolyte. La profondeur de l'électrolyte est de 3 cm. Il y correspond la distribution du potentiel représentée sur la figure 44.

L'utilisation de la relation (98)

$$\frac{dLy}{ds} = - \frac{4\pi i}{E_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} U}$$

nécessite le choix d'un certain nombre de lignes de courant, et la détermination de i et de E_0 en un certain nombre de points de ces lignes.

Nous dresserons donc d'abord la carte des i . Pour cela nous tracerons plusieurs trajectoires électroniques et nous écrirons la conservation du courant électrique pour chaque tube de courant, ce qui permettra d'avoir i en un certain nombre de points, sous réserve de connaître sa valeur en un point quelconque du tube de courant. En générale, les intensités de courant se déduiront des valeurs des intensités de courant sur la cathode. On obtiendra par exemple ces valeurs comme il a été indiqué précédemment. Dans l'exemple traité (fig. 44), nous voyons que l'équipotentielle 7,5 V est parallèle à la cathode. Il en résulte

On trouve, avec les unités arbitraires choisies pour faire le calcul :

$$\frac{U^{3/2}}{d^2} \simeq 1,7,$$

ce qui correspond à une densité de courant de 3,9 A/cm², alors que la valeur exacte est 3,4 A/cm².

Pour obtenir la carte des i dans le système étudié nous considérerons les trajectoires électroniques distantes entre elles, sur la cathode, de 15 mm à l'échelle 100 (fig. 44). Nous choisirons ensuite des surfaces équipotentielles sur lesquelles nous voulons connaître i . Dans notre problème, nous prendrons les équipotentielles : 30 V, 60 V, 90 V, 120 V, 180 V, 240 V, 300 V, 450 V, 600 V, 750 V, 900 V, 1 050 V, 1 200 V, 1 350 V, 1 500 V.

La considération des tubes de courant électronique permettra, en exprimant la conservation de l'électricité, d'obtenir la valeur de i pour 4 points de chacune des équipotentielles précédentes. Ces

1^{re} APPROXIMATION

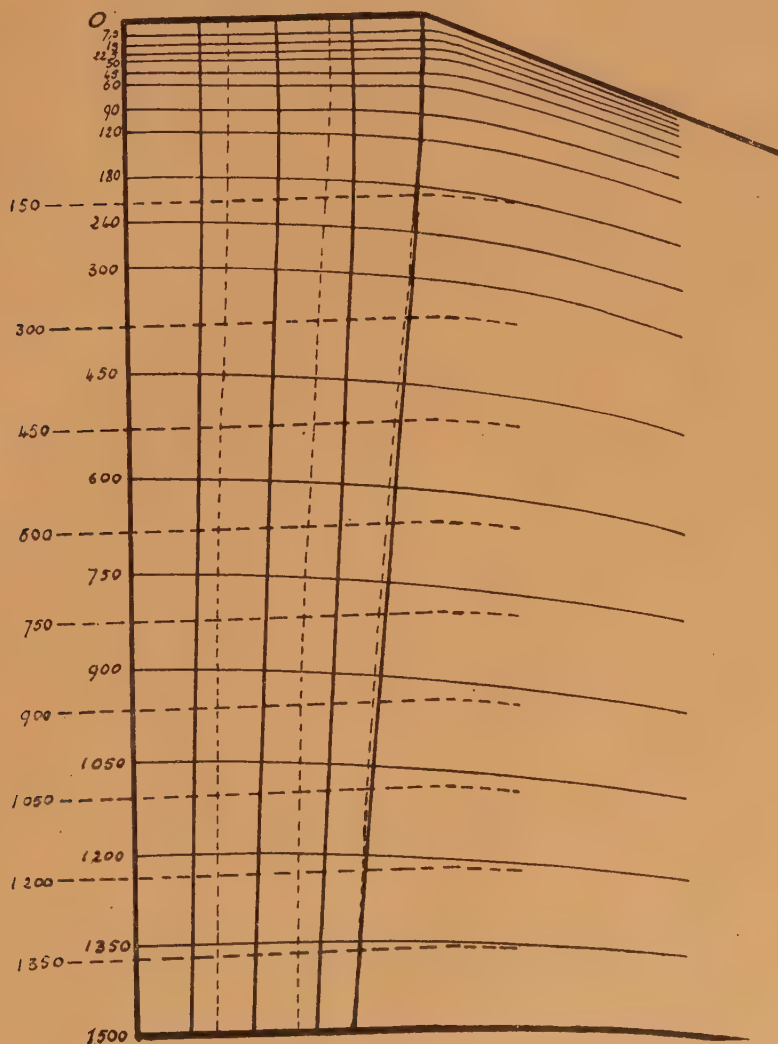


FIG. 44.

que la densité du courant est uniforme sur la cathode et qu'il suffit de la déterminer en un point.

Pour cela nous traçons la courbe $U^{3/4} = f(d)$, dont la carte du potentiel nous donne quelques points. A partir de cette courbe, on calcule $U^{3/2}/d^2$.

points ne correspondent généralement pas à ceux qui nous intéressent le long des lignes de courant, aussi tracerons-nous à partir de ces 4 points la courbe donnant les valeurs de i le long de l'équipotentielle supposée développée.

Nous utiliserons de plus le fait que dans le cas où la structure présente un plan de symétrie, la courbe $i = f(l)$, le long de l'équipotentielle, a une tangente horizontale dans ce plan. A titre d'indication, nous indiquons sur la figure 45 quelques-unes de ces courbes.

Nous tracerons ensuite un certain nombre de lignes de courant. Pour notre problème, nous en considérons 3, distantes entre elles de 20 mm sur la cathode (fig. 44, traits pointillés fins). Nous pourrions les obtenir à la cuve électrolytique, en permutant les surfaces isolantes et conductrices, mais il est aussi simple de les tracer graphiquement en utilisant le

$E_0 = f(s)$. D'autre part, nous pouvons tirer les valeurs de i en un certain nombre de points de chaque ligne de courant en partant des courbes $i = f(l)$ correspondant aux différentes lignes équipotentielles considérées.

Pour obtenir le profil du fond le long de chacune des lignes de courant envisagées, nous calculons à la règle à calcul $\frac{dLy}{ds} = -1,90.10^5 \frac{i}{EVU}$ pour chacun des potentiels envisagés précédemment, en prenant pour valeur de i et de E les valeurs relevées sur le modèle à l'échelle 100, puis nous traçons la courbe $\frac{dLy}{ds} = f(s)$.

Nous calculerons ΔLy pour différentes valeurs de s et de Δs . Dans le cas traité actuellement, nous avons pris pour s les valeurs suivantes exprimées en millimètres : 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200.

On fait maintenant le restant du calcul en utilisant une table de logarithmes ou une règle à calcul

Nous transformerons d'abord $\Delta Ly = L \frac{y_{n+1}}{y_n}$ en logarithmes décimaux, d'où nous tirerons $\frac{y_{n+1}}{y_n}$.

Puis, nous fixerons une valeur de Z en un point de chaque ligne de courant. Pour plus de commodité, nous prendrons la même valeur de Z le long d'une équipotentielle déterminée.

Nous devons remarquer que nous avons avantage à prendre cette équipotentielle très voisine de la cathode. En effet, au cours des diverses approximations les lignes de champ électrique vont se modifier. Leur modification aura d'autant moins d'importance que le fond sera moins gauchi, or c'est au voisinage de la cathode que la forme des équipotentielles agit le plus sur la trajectoire de l'électron, puisque sa vitesse y est faible. D'autre part, nous nous arrangeons pour que la profondeur d'eau minimum soit de l'ordre de 5 mm.

Nous avons ainsi obtenu pour les 4 lignes de courant choisies les profils suivants :



FIG. 45.

ds en mm	y_{s1} en mm	y_{s2} en mm	y_{s3} en mm	y_{s4} en mm
10	17,0	17,0	17,0	17,0
20	14,2	14,6	14,3	14,1
30	12,9	13,3	12,9	12,5
40	11,9	12,2	11,8	11,2
50	11,1	11,4	11,1	10,3
60	10,4	10,8	10,5	9,5
70	9,9	10,3	9,9	8,8
80	9,4	9,8	9,5	8,4
100	8,6	9,1	8,7	7,4
120	7,9	8,4	8,1	6,6
140	7,4	7,9	7,6	5,9
160	6,9	7,5	7,2	5,4
180	6,5	7,2	6,8	4,8
200	6,1	6,6	6,4	4,2

Remarque : Pour mettre en évidence l'amélioration apportée sur la connaissance de la forme du faisceau par l'introduction d'un fond conducteur faisant un angle $3\pi/8$ avec le plan horizontal, au voisinage de la cathode, nous avons déterminé

prisme isocèle pour vérifier l'orthogonalité des lignes de courant et des équipotentielles.

Pour chacune de ces lignes de courant nous traçons la courbe $U = f(s)$, d'où nous déduisons

(fig. 46) la trajectoire de l'électron marginal en utilisant la cuve électrolytique comme elle est employée habituellement. On voit que la présence de cette électrode donne déjà une idée de la densité de courant sur la cathode et améliore notablement la connaissance de la forme du faisceau électronique.

Deuxième approximation. — En utilisant le fond modelé déduit de la première approximation, nous obtenons une nouvelle distribution du potentiel et de nouvelles trajectoires électroniques (fig. 47).

Le remplissage de la cuve a été fait de la façon suivante :

On a taillé une cale dont la hauteur est égale à la hauteur de l'électrolyte définie par rapport au fond plan de la cuve. Cette cale étant placée dans la cuve, on amène la pointe de la sonde au contact de la partie supérieure de la cale, que l'on retire ensuite, et on remplit la cuve jusqu'à ce que l'eau arrive au contact de la sonde, ce qui se voit très facilement

Nous constatons sur la figure 47 que, bien que la distribution du potentiel ne soit pas tout à fait identique à la distribution réelle, nous obtenons une très bonne approximation sur la connaissance des trajectoires et qu'il n'est pas utile de poursuivre plus loin la série des approximations, puisque ce qui nous intéresse en dernier ressort, ce sont les trajectoires électroniques. Nous pouvons aussi remarquer que la densité de courant sur la cathode, déduite comme précédemment de la carte du potentiel, a pour valeur $3,4 \pm 0,1 \left(\frac{U^{3/2}}{d^2} \simeq 0,9 \right)$, ce qui correspond à la densité réelle.

Description de la cuve utilisée pour ces expériences.

La cuve électrolytique utilisée présente les principales caractéristiques suivantes (fig. 48).

2^e APPROXIMATION

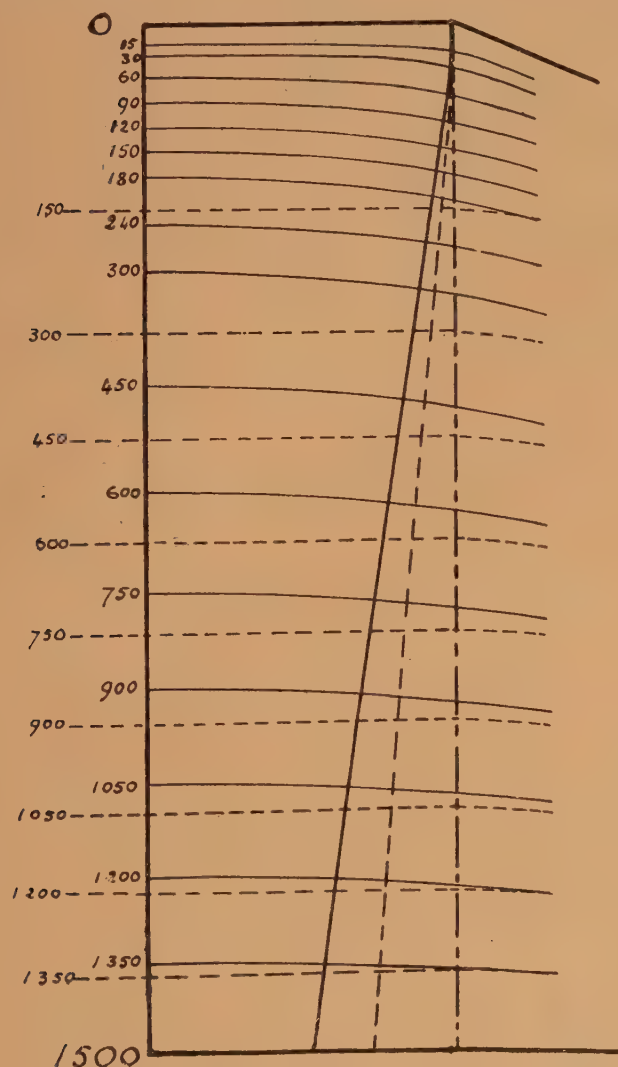


FIG. 46.

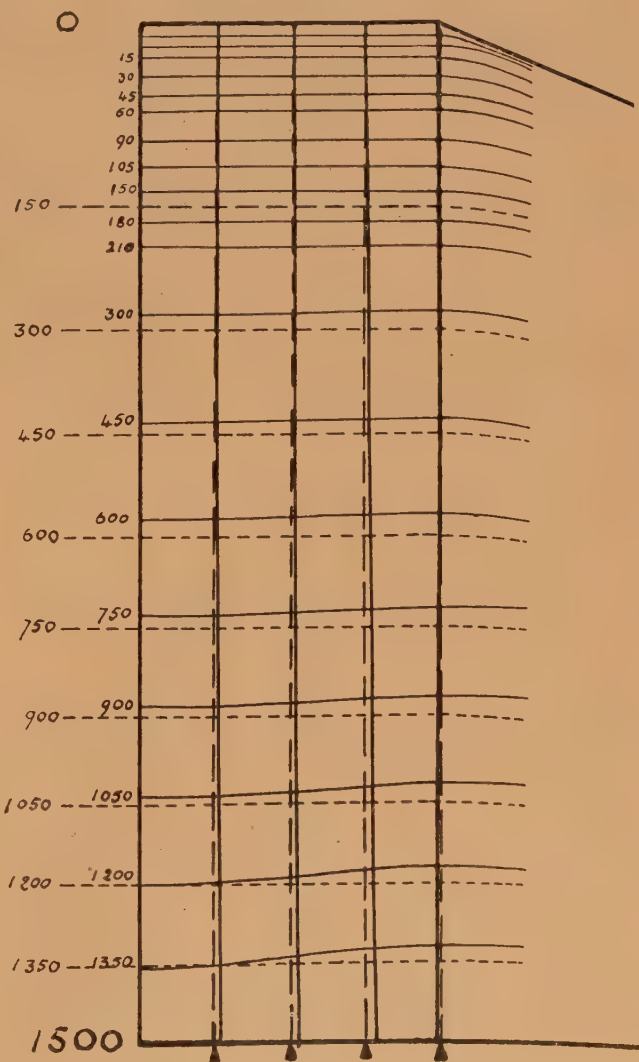


FIG. 47.

à l'oscillographe. J'attire encore une fois l'attention sur l'importance des fuites électriques. Pour les éviter, nous avons coulé de la paraffine en couche très mince, aux lignes de jonction du fond modelé et de la cuve.

A. — La cuve est en verre. Elle a pour dimensions : $76 \times 132 \times 12$ cm. Tous les joints ont été recouverts de paraffine, de façon à réaliser une cuve parfaitement isolée du bâti métallique. Elle peut être horizontale ou inclinée (pour l'étude des pro-

blèmes de révolution), l'angle du fond de la cuve avec l'horizontale pouvant être compris entre 6 et 16°.

B. — Le report des points repérés dans la cuve est fait sur une feuille de papier placée au-dessus

électrique est indiqué sur la figure 49. L'appareil permettant d'apprécier le réglage du pont est un oscillographe O. C. P. 31 de la Compagnie des Compteurs, dont la plus grande sensibilité, pour la déviation verticale, correspond à 3mV/cm. On

FIG. 48.

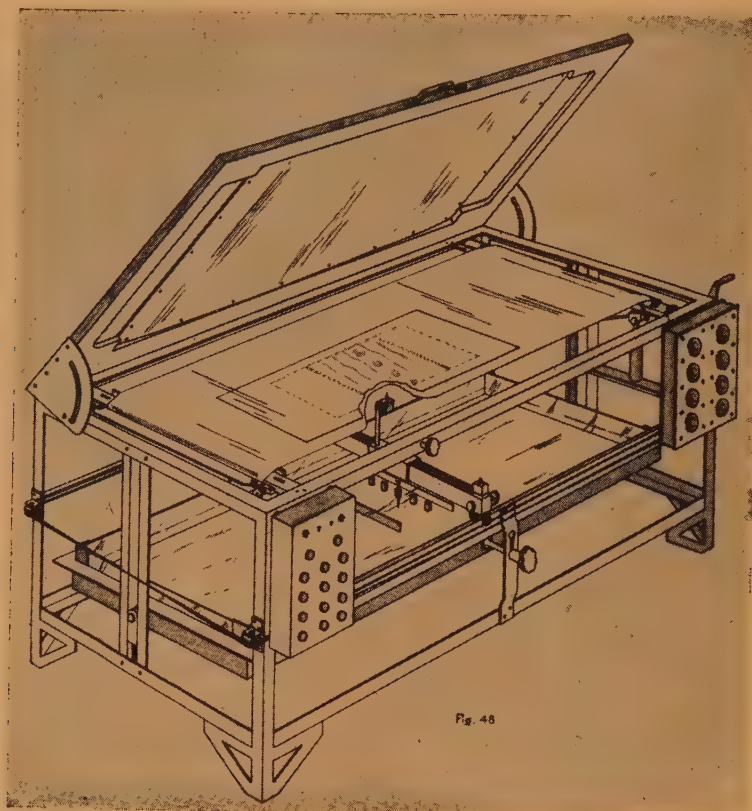
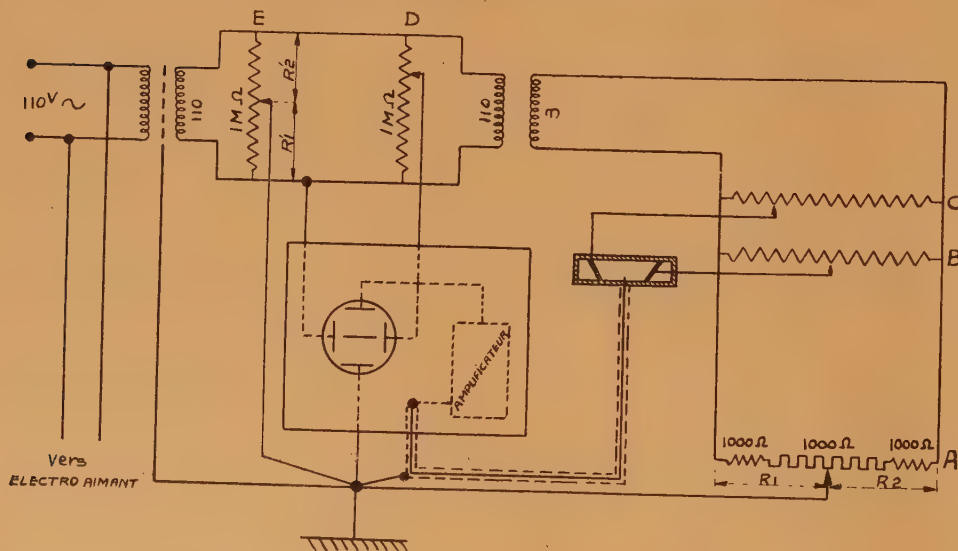


FIG. 49.



de la cuve, par l'intermédiaire d'un pointeau commandé par un électro-aimant. Un système mécanique assure la tension d'une feuille de cellophane, sur laquelle on pose une feuille de papier au carbone, puis la feuille de papier calque. Un cadre supportant une feuille de plexi-glass vient maintenir la feuille de papier.

C. — La cuve est alimentée à partir du secteur sous une tension de l'ordre de 3 volts. Le montage

applique sur les plaques verticales la différence de potentiel prise entre la sonde et le curseur du potentiomètre de référence A (1 000 Ω), et directement sur les plaques horizontales une tension proportionnelle à la tension du secteur, réglable par le potentiomètre D (1M Ω). Si nous supposons qu'il n'y a aucune capacité parasite dans le montage, nous observerons, quand nous ferons varier au voisinage du réglage la tension de la sonde, une droite tournant

sur l'écran de l'oscillographe, le réglage étant obtenu quand cette droite est horizontale.

Les électrodes sont alimentées par les potentiomètres B et C (30 Ω), le seul fil blindé du montage étant le fil de la sonde.

En réalité, par suite des capacités parasites, entre les différents fils et la masse d'une part et la polarisation de l'électrolyte, d'autre part, nous observons sur l'écran de l'oscillographe une ellipse au lieu d'une droite, ce qui diminue la précision du réglage au zéro, qui correspond à un déphasage de l'ordre de 10^{-5} . Pour éviter cet inconvénient, on utilise un potentiomètre E de 2 M Ω , dont le curseur est relié à la masse.

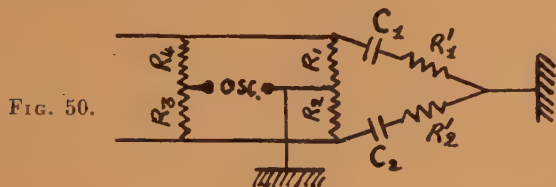


FIG. 50.

Si nous considérons le schéma électrique équivalent (fig. 50, où l'on a schématisé les capacités parasites par les deux condensateurs C_1 et C_2), les conditions d'équilibre du pont sont données pour la partie imaginaire par :

$$R_1 R_3 \left[\frac{R'_1}{C_2 \omega} + \frac{R_2 + R'_2}{C_1 \omega} \right] = R_2 R_4 \left[\frac{R_1 + R'_1}{C_2 \omega} + \frac{R'_2}{C_1 \omega} \right]$$

et pour la partie réelle par :

$$R_1 R_3 \left[R'_1 (R_2 + R'_2) + \frac{1}{C_1 C_2 \omega^2} \right] = R_2 R_4 \left[R'_2 (R_1 + R'_1) + \frac{1}{C_1 C_2 \omega^2} \right]$$

Nous voyons que si R_1 et R_2 sont très inférieures respectivement à R'_1 et R'_2 (1 000 fois plus petites), ces deux relations seront vérifiées avec $R_1 R_3 = R_2 R_4$ à $1/1\,000$ près environ.

Dans le montage utilisé nous avons toujours $\frac{R_1}{R'_1}$ et $\frac{R_2}{R'_2} < 10^{-3}$, par suite de la mise en série avec le potentiomètre de référence A de deux résistances de 1 000 Ω .

L'étude de la distribution du potentiel entre deux électrodes planes et parallèles a montré que le potentiel en un point pouvait être déterminé à moins de 0,1 mm.

CHAPITRE IV

EXTENSION DE LA MÉTHODE DU FOND MODELÉ À LA RÉOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE.

SOMMAIRE. — La méthode du fond modelé peut s'étendre à la recherche d'une fonction $\varphi(x, y)$ satisfaisant à une équation aux dérivées partielles du type $\Delta\varphi(x, y) = f(\varphi(x, y))$ et à des conditions aux limites données, sous réserve de la convergence des approximations successives et de la possibilité de figurer matériellement dans la cuve les conditions aux limites.

Nous indiquerons certaines de ces réalisations et nous en décrirons de nouvelles.

Nous rappellerons les relations permettant de définir le fond modelé et nous examinerons quelles sont les conditions qu'il est nécessaire de connaître pour étudier à la cuve la fonction φ . Nous indiquerons quelques problèmes susceptibles d'être résolus de cette façon et, à titre d'exemple, nous traiterons le cas de la représentation d'une onde E_0 dans un guide cylindrique, la fréquence étant égale à la fréquence de coupure.

INTRODUCTION. — Les développements et calculs faits pour la détermination d'un fond modelé donnant en surface la distribution du potentiel, compte tenu de la charge d'espace, sont facilement transposables au cas d'une fonction $\varphi(x, y)$ satisfaisant à $\Delta\varphi(x, y) = f(\varphi(x, y))$.

Certaines fonctions correspondant à des formes particulières de $f(\varphi)$ ont déjà été étudiées à la cuve, mais la détermination du fond modelé était faite d'une façon différente de celle que nous avons indiquée précédemment, et en particulier ne permettait pas de se rendre compte de l'importance de la hauteur maximum de l'électrolyte compatible avec l'équation approchée définissant le fond.

Elle repose essentiellement sur l'analogie suivante :

Considérons la répartition du courant dans une plaque conductrice homogène mince, en désignant par :

U la fonction potentielle,

W la fonction de courant,

σ la résistivité du conducteur,

ξ l'épaisseur du conducteur au point M (x, y),

i_x la projection de la densité de courant sur un axe OX,

i_y la projection de la densité de courant sur un axe OY perpendiculaire à OX.

On a, en supposant les variations de Z infiniment petites :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -i_x \sigma, & \frac{\partial W}{\partial x} &= i_y \xi, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -i_y \sigma, & \frac{\partial W}{\partial y} &= -i_x \xi, \\ (101) \quad \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\sigma}{\xi} \frac{\partial W}{\partial y}, & \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\sigma}{\xi} \frac{\partial W}{\partial x}. \end{aligned}$$

Soit φ la fonction cherchée et ψ la fonction associée, ces deux fonctions étant liées par les relations :

$$(102) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lambda_{(x,y)} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\lambda_{(x,y)} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

où $\lambda(x, y)$ est une fonction donnée, que nous admettrons être de signe constant.

La comparaison des relations (101) et (102) montre que nous pouvons identifier la fonction φ à U ($\varphi = mU$) ou à W ($\varphi = nW$). Dans ces conditions, la cote ξ du fond est déterminée en tous points par :

$$\xi = \frac{k}{\lambda_{(x,y)}}.$$

Nous voyons que le fond modelé exact est obtenu sans approximations successives.

De l'équation (102) nous pouvons tirer l'équation différentielle du second ordre définissant la fonction φ .

Nous avons :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{\lambda(x,y)} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{\lambda(x,y)} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(\varphi),$$

équation ne faisant intervenir que les dérivées de la fonction φ .

TAYLOR et SHARMANN étudièrent ainsi [21] le mouvement stationnaire plan et irrotationnel d'un fluide compressible. MALAVARD [22] utilisa un bassin à fond hyperbolique dans l'étude de la fonction φ pour un problème de même nature.

Indépendamment de cette méthode, THUM et BAUTZ [23], puis SALET [24] étudièrent à la cuve électrolytique les points de tension dans les arbres de révolution soumis à la torsion, en remarquant que dans un conducteur homogène dont l'épaisseur varie suivant une loi en K/r^3 le potentiel U_M obéit à la même équation différentielle du second ordre :

$$\frac{\partial^2 U_M}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_M}{\partial r^2} = \frac{3}{r} \frac{\partial U_M}{\partial r}$$

que le moment de torsion transmis par une section circulaire qui est perpendiculaire à l'axe et dont le cercle périphérique passe par M. Là encore le fond de la cuve est connu a priori.

Rappelons que nous venons de voir la représentation à la cuve de la fonction U_0 vérifiant la relation :

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} = - \frac{4\pi i}{\sqrt{\frac{2e}{m}} U_0}.$$

Pour ce problème, il a été nécessaire d'utiliser une méthode d'approximations successives. Nous indiquerons plus loin une autre forme d'équations différentielles pour laquelle le fond modelé peut être obtenu immédiatement, ainsi que les relations donnant le fond dans le cas le plus général.

Au préalable, nous allons rappeler la réalisation de certaines conditions aux limites et en indiquer de nouvelles.

Étude de la réalisation des conditions aux limites.

La fonction φ étant définie par l'équation différentielle et par les conditions aux limites, la réalisation de celles-ci dans la cuve est très importante. On utilise différents artifices, basés sur le fait qu'une paroi métallique dans la cuve correspond à une surface équipotentielle et qu'une paroi isolante impose aux lignes de courant de lui être parallèles, c'est-à-dire que la dérivée normale de la fonction φ est nulle. Nous rappellerons succinctement ces artifices et nous en indiquerons de nouveaux [43], [22], [25].

Si à une frontière de la fonction :

— la fonction doit être constante, cette frontière est matérialisée dans le bassin par une électrode

très conductrice par rapport au liquide du bassin ;

— la dérivée normale $d\varphi/dn$ doit être nulle (ligne de flux du bassin), on la réalise par une paroi isolante ;

— la fonction φ a des valeurs données, on limite le champ dans la cuve par de petites électrodes, dont les potentiels devront être réglés aux valeurs fixées ;

— le gradient $d\varphi/dn$ a des valeurs données, on utilise le fait que les valeurs du gradient à une frontière sont proportionnelles aux intensités de courant i entrant dans la cuve par de petites électrodes constituant cette frontière.

On a une relation linéaire entre φ et $\frac{d\varphi}{dn}$:

$$\varphi + a \frac{d\varphi}{dn} = b,$$

où a et b sont des données pouvant d'ailleurs dépendre du point de la frontière. On utilise une correspondance entre cette relation et la loi d'Ohm pour un conducteur linéaire de résistance R , $U + Ri = U'$, ce qui conduit à amener le courant aux électrodes par des résistances R dont les autres extrémités ont des potentiels réglés U' (fig. 51).

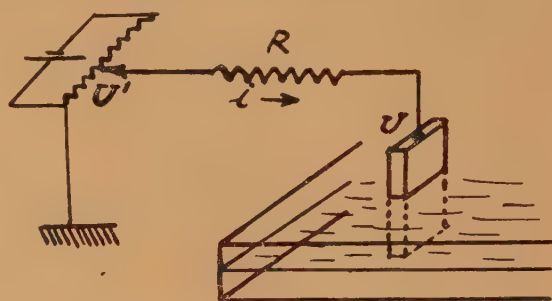


FIG. 51.

On a un tourbillon ponctuel en un point A (22). On le réalise en séparant en A deux électrodes métalliques portées à des potentiels différents U_1, U_2 par une petite feuille de mica (fig. 52).

On a un doublet en un point A (26). On le représente par deux électrodes dont les sections droites seraient deux cercles égaux, tangents entre eux suivant la normale à l'axe du doublet.

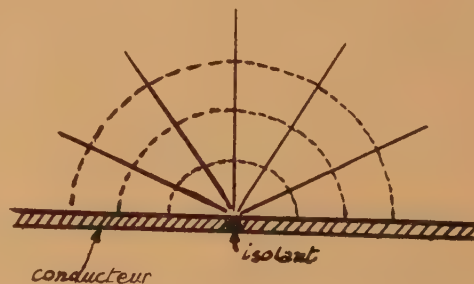


FIG. 52.

Pour éviter le contact direct entre les deux électrodes, on supprimera les parties correspondantes en intercalant un isolant qui devra se terminer par des portions de cylindres dont les sections droites sont des cercles du faisceau conjugué (fig. 53).

En plus des conditions aux frontières, il peut y avoir d'autres conditions à transcrire à la cuve. Par exemple :

Supposons que la fonction φ ne soit pas uniforme, le potentiel étant uniforme, il ne paraît pas possible



FIG. 53.

à priori d'identifier la fonction φ au potentiel. On peut y arriver moyennant l'artifice suivant [22], [27]. Si l'on connaît une des lignes équipotentiellles cherchées, on alimente la cuve suivant deux électrodes séparées par une couche isolante mince et disposées suivant cette ligne (fig. 54).

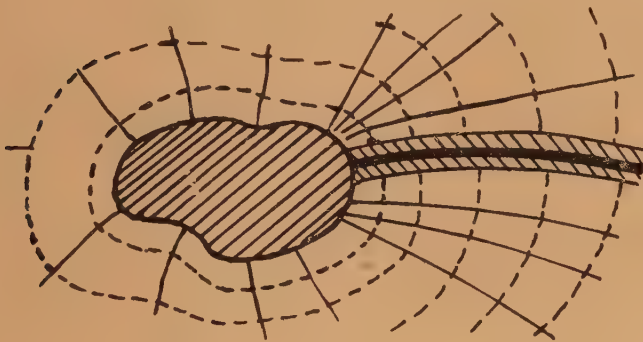


FIG. 54.

Si la fonction φ est uniforme, mais présente sur des coupures des discontinuités par saut, prenant des valeurs en général différentes φ^- et φ^+ aux deux points correspondants des deux bords d'une coupure, alors que la dérivée normale est continue à la traversée de la coupure et que φ^- et φ^+ sont liés par une relation :

$$\frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2} + H \frac{d\varphi}{dn} = F;$$

on constitue la coupure par une lame isolante métallisée sur ses deux faces. Des traits parallèles aux génératrices de la surface cylindrique séparent la couche métallique en électrodes étroites assez nombreuses.

L'égalité des dérivées normales est assurée par le fait qu'il y a égalité entre l'intensité de courant entrant dans la cuve par une électrode et l'intensité sortant par l'électrode située vis-à-vis. Pour réaliser la relation entre φ et $d\varphi/dn$, on utilise le montage

de la figure 55, alimenté par un petit transformateur, de façon à rendre indépendants les réglages des différentes paires d'électrodes, où

σ est la résistivité de l'électrolyte employé,

h la hauteur de l'électrolyte au niveau du conducteur,

ε la largeur de l'électrode.

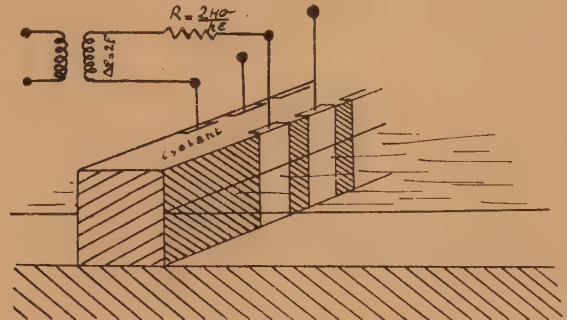


FIG. 55

Le montage ne marche que si la résistance R est évidemment positive.

Si la fonction φ est continue, mais telle que lors de la traversée d'un contour donné on ait :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial T}\right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T}\right)_2,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)_1 = K \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right)_2,$$

on place le long de ce contour des tiges métalliques assez fines (de 0,5 à 0,8 mm, espacées de 4 à 6 mm), les profondeurs d'électrolyte de part et d'autre du contour étant dans le rapport K .

En effet, le champ électrique au voisinage d'une électrode de faible largeur ε est lié au courant I qui y arrive ou qui la quitte par la relation :

$$\frac{d\varphi}{dn} = I \frac{\sigma}{h\varepsilon},$$

qui, appliquée aux régions 1 et 2 (faces AB et CD, fig. 56), donne :

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_{AB} = I \frac{\sigma}{h_1\varepsilon} \quad \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_{CD} = I \frac{\sigma}{h_2\varepsilon},$$

d'où :

$$\frac{h_2}{h_1} = K,$$

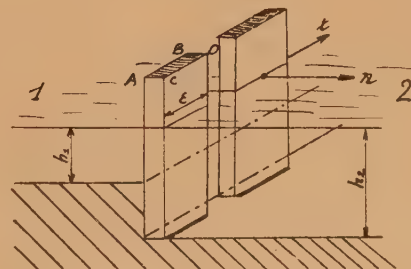


FIG. 56.

alors que pour les faces AC et BD nous avons :

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{AC} = I' \frac{\sigma'}{h_2\varepsilon} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{BD}.$$

Par ailleurs, nous rappellerons que si nous avons une fonction φ donnée sur le contour et obéissant à

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x, y),$$

nous pourrions ramener la recherche de cette fonction à celle d'une fonction harmonique φ_2 si nous trouvons une solution particulière quelconque φ_1 de l'équation aux dérivées partielles. La fonction φ_2 est définie par le fait qu'en tout point du contour, elle prend la valeur connue $\varphi - \varphi_1$.

De l'étude sur la représentation à la cuve électrolytique de la charge d'espace que nous avons traitée précédemment, nous pouvons déduire des moyens de réaliser les conditions aux limites suivantes :

Si le champ $d\varphi/dn$ s'annule sur une frontière, nous serons conduits, pour un fond isolant, d'après la relation $\frac{d\varphi}{dn} = \frac{I\sigma}{h\varepsilon} = 0$, à prendre h infiniment grand. Ceci est matériellement impossible d'une part, et d'autre part, toutes les formules qui définissent le fond de la cuve supposent essentiellement que sa pente est infiniment petite. Au contraire, la relation (99) permet de réaliser convenablement cette condition en utilisant un fond conducteur.

Si ces relations ne sont pas applicables, on peut déterminer la courbe orthogonale aux lignes de courant passant par le point où le champ s'annule et on la matérialise par une électrode métallique, en supposant connue l'équation du fond sans approximations successives.

Dans le cas d'une fonction φ donnée sur le contour, on peut réaliser cette condition plus commodément et avec plus de précision qu'en disposant sur le contour une série de petites électrodes portées aux potentiels voulus, en utilisant comme paroi un conducteur de section convenable, dont la résistivité est faible par rapport à celle de l'électrolyte.

En effet, considérons la relation (94) ou (98), donnant le profil du fond le long d'une ligne de courant, que nous écrirons :

$$\frac{dLZ}{ds} = -\frac{\Delta\varphi_0}{E_0}$$

en désignant par Z la profondeur de l'électrolyte, et supposons que nous ayons un conducteur infiniment mince, dans ce cas :

$$\Delta\varphi_0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \text{ se réduira à } \frac{d^2 \varphi}{ds^2}.$$

Comme $E_0 = \frac{d\varphi}{ds}$, nous avons :

$$\frac{dLZ}{ds} = -\frac{\frac{d^2 \varphi}{ds^2}}{\frac{d\varphi}{ds}} = -\frac{d}{ds} \left(L \frac{d\varphi}{ds} \right),$$

d'où :

$$(103) \quad LZ = -L \frac{d\varphi}{ds} + K, \quad Z = \frac{K}{\frac{d\varphi}{ds}}.$$

Nous obtiendrons d'ailleurs la même relation en partant de la loi d'Ohm.

Il en résulte que si nous prenons un conducteur infiniment mince, d'épaisseur constante, nous saurons réaliser sur la tranche plane supérieure de ce conducteur une distribution donnée du potentiel par un découpage correct de ce conducteur alimenté par ses deux extrémités. Si la résistance est très faible par rapport à celle de l'électrolyte, le courant qui y circule est très grand par rapport au courant qui en chaque point de l'électrode passe dans l'électrolyte. La variation dans la distribution de potentiel causée dans le milieu conducteur par les courants issus de l'électrolyte sera donc très faible.

Définition du fond modelé. — Soit à trouver une fonction φ_0 satisfaisant à $\Delta\varphi_0 = \Psi_{\varphi_0(x,y)}$ et à certaines conditions aux limites représentables à la cuve. Pour la détermination du fond, les calculs faits à propos de la charge d'espace peuvent être repris en remplaçant $4\pi\rho$ par $\Psi_{\varphi_0(x,y)}$ dans l'étude des problèmes à symétrie plane. On obtient ainsi avec les mêmes notations et les mêmes réserves que précédemment :

$$(104) \quad \frac{dLZ}{ds} = -\frac{\Psi_{\varphi_0}}{E_0}$$

avec $\vec{E}_0 = \vec{\text{grad}} \varphi_0$ pour le fond isolant et :

$$(105) \quad \varphi = \varphi_0(x, y) - \frac{1}{2} \Psi_{\varphi_0(x,y)} Z^2 = \text{Cte}$$

dans le cas du fond conducteur. Et l'on procède comme pour la charge d'espace, par approximations successives.

Nous pouvons remarquer que pour certaines formes de la fonction $\Psi_{\varphi_0(x,y)}$ nous pouvons obtenir, sans approximations successives, le fond modelé qui donnera à la surface la fonction φ_0 .

Supposons que $\Psi_{\varphi_0(x,y)}$ soit de la forme :

$$\Psi_{\varphi_0(x,y)} = -f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - g(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

on a :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + g(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Prenons l'équation définissant le fond sous la forme :

$$(106) \quad \frac{1}{Z} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial y} \right) = -\Psi_{\varphi_0}.$$

Posons :

$$(107) \quad Z_1 = X_{(x)} Y_{(y)},$$

Nous voyons que la relation (106) sera vérifiée si nous avons :

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dx} = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{1}{Y} \frac{dY}{dy} = g(y),$$

ce qui détermine les fonctions X et Y et par suite Z , en tous points. L'équation différentielle étudiée par SALET est de ce type, avec $X = \text{Cte}$.

Si nous avons à résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - g(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} - h(\varphi),$$

nous effectuerions le changement de variable

$$\xi Z = Z_1 :$$

ξ est alors défini par :

$$(108) \quad \frac{dL\xi}{dS} = -\frac{h(\varphi)}{E_0}.$$

d'emploi plus commode que (104).

Remarques. — 1) Dans l'étude des problèmes d'optique électronique, tant que la charge d'espace n'est pas trop importante, et dans le cas des canons à électrons, le champ électrique ne s'annule pas dans le domaine de la fonction à étudier, si bien que tout le fond est isolant, sauf au voisinage du contour. Dans le cas général il n'en est pas forcément ainsi et les dérivées de la fonction φ peuvent s'annuler simultanément en un point M du domaine. Nous pouvons remarquer que dans ce cas l'équation définissant le fond isolant n'est plus utilisable, car le champ électrique étant au dénominateur nous serions conduits à des valeurs de Z infiniment grandes, ce qui n'est pas compatible avec les méthodes de développements en séries utilisées.

En revanche, sous réserve qu'en M, $\Delta\varphi$ soit fini et non nul, l'équation définissant le fond conducteur reste valable. Ce conducteur doit d'ailleurs être porté au potentiel φ_0 . Nous pouvons remarquer que dans le cas où $\Delta\varphi = 0$, le fond métallique est vertical, car $\varphi_0 - 0 \times Z^2 = \varphi_0$ est vérifié quel que soit Z .

Il en résulte que dans le cas où la fonction φ présente un maximum ou un minimum, nous devons placer en ce point une électrode de forme convenable et la porter au potentiel φ .

2) Si nous considérons les phénomènes de révolution, nous avons :

$$(78) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 ;$$

l'application de la relation (108) donne :

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dr} = \frac{1}{r},$$

d'où l'on tire $R = Kr$.

On retrouve bien un fond de cuve plan incliné sur l'horizontale et passant par l'axe de révolution.

Étude de la charge d'espace dans un espace dépourvu de champ appliqué. — Ce cas diffère des précédents par le fait que le potentiel passe par un minimum en un point ne se trouvant pas sur le contour du domaine étudié.

Il est évident a priori qu'il existe un minimum pour la distribution du potentiel, ce qui nécessitera la mise en ce point M d'une électrode métallique. Cela serait d'ailleurs nécessaire pour une autre raison. Puisqu'il n'y a aucun champ électrique appliqué, l'espace considéré en l'absence de faisceau électronique est équipotentiel et, en l'absence de lignes de courant, on ne peut trouver le fond correspondant à l'approximation suivante. Il en résulte

que la méthode du fond modelé n'est pas applicable immédiatement, puisqu'elle suppose essentiellement l'existence de lignes de courant.

Si nous connaissons la position de ce minimum et sa valeur, nous résoudrons alors facilement le problème en utilisant la méthode des approximations successives.

Si nous ne connaissons que la position du minimum, nous pourrions en déduire à la cuve sa valeur en opérant de la façon suivante :

Nous avons :

$$\Delta U = -\frac{4\pi i}{\sqrt{\frac{2e}{m}} U}.$$

Nous nous donnerons une valeur arbitraire pour le potentiel du point M, que nous prendrons aussi proche que possible de la valeur exacte, et nous construirons le long d'une ligne de courant les courbes :

$$-\frac{4\pi i}{\sqrt{\frac{2e}{m}} U} = f(s) \text{ et } \Delta\varphi = f'(s).$$

Ces courbes doivent se superposer dans la distribution exacte, ce qui permet d'obtenir la valeur exacte de φ et la distribution du potentiel, par approximations successives.

Étude des champs magnétiques à lignes de flux planes. — Nous savons que la distribution du champ

magnétique $\vec{H}$ est régie par les équations :

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 4\pi i.$$

Si nous ne considérons que des champs à deux dimensions, les courants i circulant parallèlement à l'axe des Z , on a :

$$i_x = i_y = 0, \quad i_z = i, \quad H_z = 0.$$

Considérons la fonction φ définie par :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = H_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -H_y.$$

Il en résulte que les lignes $\varphi = C^{\text{te}}$ correspondent aux lignes de champ magnétique. On tire des relations précédentes :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -4\pi i,$$

qui redonne l'équation de Laplace dans le cas où

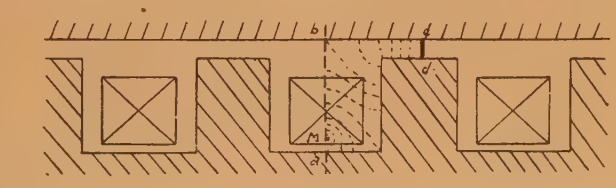


Fig. 57.

$i = 0$. De tels champs ont déjà été étudiés par LEHMANN Th. [28]. Si nous supposons que la perméabilité du fer est infinie, les surfaces métalliques

sont des surfaces perpendiculaires aux lignes $\varphi = \text{Cte}$, nous les représenterons à la cuve par des parois isolantes. Les surfaces conductrices correspondent aux extrema de la fonction φ . Par des raisons de symétrie, il est souvent facile de connaître une de ces lignes. Considérons par exemple le cas de lignes de flux tourbillonnaires dans une encoche large d'une machine tournante (fig. 57). Nous limiterons le modèle par le polygone a, b, c; d, e (ab et cd sont respectivement deux plans de symétrie). La ligne cd est une ligne de champ, qui pourra correspondre à une surface équipotentielle. Si nous voulons pouvoir déterminer H dans toute cette surface, il faut connaître le maximum de la fonction φ . Ce point M [28] peut souvent être connu à priori par des considérations élémentaires.

Nous appliquerons ensuite la méthode des approximations successives.

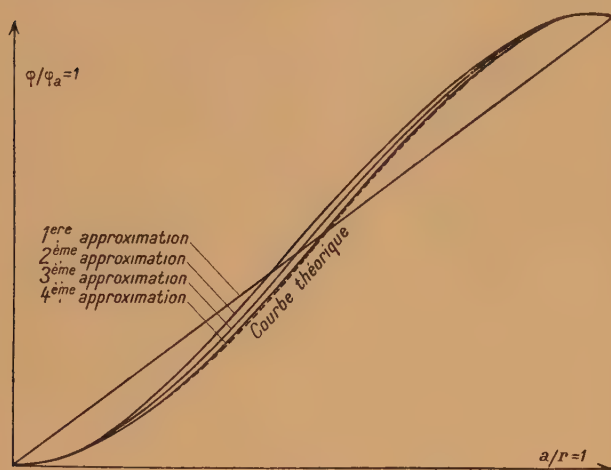


FIG. 58.

Étude des champs hyperfréquences à symétrie de révolution et fonctions sinusoïdales du temps. — L'étude de ces champs est une application immédiate de ce qui précède.

En effet, une distribution de champ électromagnétique de révolution peut être décrite au moyen d'une seule fonction scalaire φ . En utilisant les coordonnées cylindriques habituelles, on a :

$$E_z = \frac{K}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \text{et} \quad E_r = -\frac{K}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

où K est une constante de proportionnalité, ce qui montre que les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{d\varphi/dn}$ sont orthogonaux. La fonction φ est définie par les conditions aux limites et par l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{4\pi^2 \varphi}{\lambda^2} = 0,$$

où λ est une des longueurs d'onde de résonance de la cavité.

Ce problème correspond à

$$\Psi_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{4\pi^2 \varphi}{\lambda^2}.$$

Nous appliquerons la méthode du fond modelé à l'étude d'une onde E_0 dans un guide cylindrique, la fréquence étant égale à la fréquence de coupure. Dans ce cas, le champ électrique dans tout le guide n'a qu'une composante axiale E_z , qui n'est fonction que de r . La fonction satisfait à $\varphi = 0$ sur l'axe et à $\varphi = \text{Cte}$ sur la surface du guide. Le champ électrique étant partout parallèle à l'axe, la dérivée $d\varphi/dn$ est toujours perpendiculaire à l'axe et nous pourrions limiter la cuve par deux parois isolantes perpendiculaires à l'axe. Cette cuve avait 200 mm de longueur et 20 mm de largeur. La méthode des approximations successives, à partir d'un fond plan, a donné les résultats indiqués sur la figure 58.

Si nous partons d'un fond modelé, tenant compte du terme $\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ et pouvant être déterminé à priori

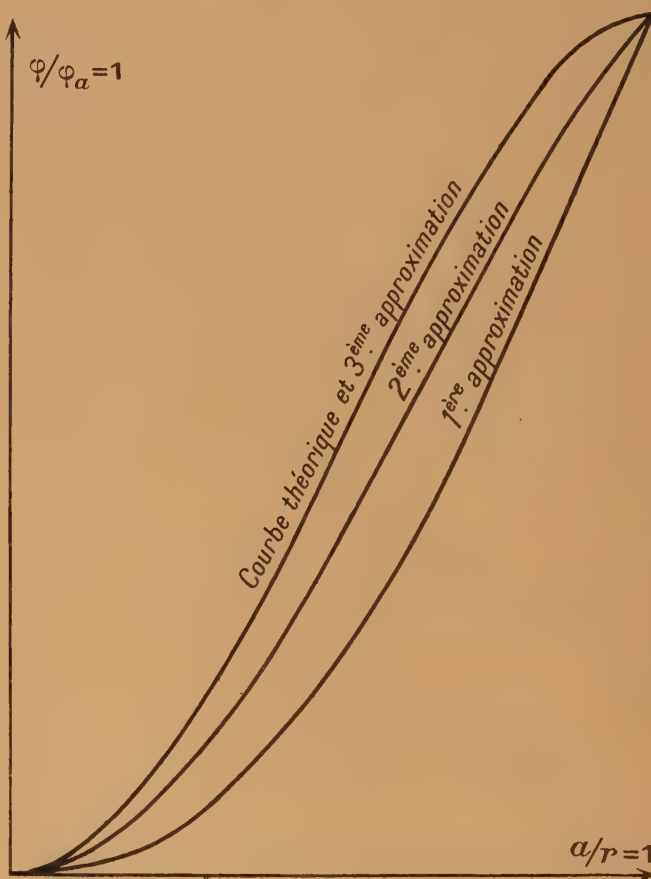


FIG. 60.

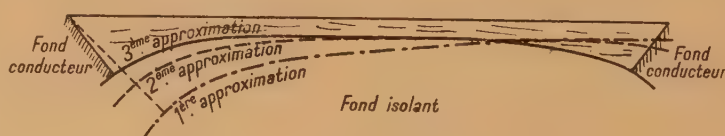


FIG. 59.

comme il a été indiqué précédemment, nous obtenons les fonds et courbes $\varphi = f(a)$ de la figure 59. Nous constatons que la convergence des approximations n'est que légèrement plus rapide. Ceci est dû au fait

que la courbe de première approximation correspondant au fond plan est mieux située en moyenne par rapport à la courbe exacte. Les courbes théoriques et de 3^e approximation sont pratiquement confondues (fig. 60).

CONCLUSIONS

I. — J'ai étudié et discuté différentes méthodes connues de construction graphique des trajectoires planes, de particules électrisées, tant du point de vue de leur précision que du point de vue de leurs conditions d'applications. J'ai indiqué des méthodes nouvelles donnant une grande précision, ou mieux adaptées à certains cas particuliers importants. J'ai éprouvé ces méthodes en les appliquant à l'étude de la trajectoire d'un électron dans le champ de force créé par un autre électron. Afin de rendre commode l'emploi des méthodes précédentes, j'ai réalisé un appareil dans lequel la détermination de la normale aux équipotentielles se fait avec une grande précision par un procédé optique.

II. — Les résultats de l'étude précédente ne permettent de connaître que les trajectoires de particules isolées, ou plus généralement, les trajectoires dans le cas où l'on n'a pas à tenir compte des interactions électrostatiques entre les particules chargées. Cette hypothèse est souvent loin d'être vérifiée, en particulier au voisinage d'une cathode à oxyde. J'ai montré que l'on pouvait tenir compte de la charge d'espace en utilisant un fond de cuve modelé isolant ou conducteur.

III. — J'ai montré que la méthode du fond modelé était applicable à l'étude d'autres problèmes, régis par des équations aux dérivées partielles du second ordre, sous la réserve que l'on sache représenter à la cuve les conditions aux limites (étude de la divergence des faisceaux électroniques dans des espaces dépourvus de champs appliqués ; détermination des champs électromagnétiques). A titre d'exemple, j'ai traité le cas de la représentation à la cuve du champ électrique pour une onde E_0 , dans un guide cylindrique, la fréquence étant égale à la fréquence de coupure.

Manuscrit reçu le 13 avril 1947.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KIRCHHOFF, Zur Theorie des Condensators (Berlin, *Monatsberichte*, 1878, p. 144-162).
- [2] GRAY F., Theory of electrostatic fields as lenses for electron beams in systems where the fields are symmetrical about a central axis, *The Bell System Technical Manual*, janvier 1939, t. 18, p. 1-29.
- [3] COCKROFT J. D., The effect of curved boundaries on the distribution of electric stress round boundaries, *Journal I. E. E.*, t. 66 (1928), p. 385-409.
- [4] KUCERA J., Répartition des flux magnétiques dans les stators et rotors, *R. G. E.*, t. 27 (1930), p. 645-657.
- [5] DUCHON R., Étude du potentiel créé par deux cylindres coaxiaux égaux portant des charges égales et opposées, *Les Cahiers de Physique*, décembre 1943.
- [6] BALACHOWSKY, Note sur un tracé de champs électriques, *Bulletin de la Société Française des Électriciens*, n° 58 (avril 1946), p. 181-186.
- [7] FROCHT M., The numerical solution of Laplace's equation in composite rectangular areas, *Journal of App. Phy.*, vol. 17 (septembre 1946), p. 730-742.
- [8] LEHMANN T., Détermination graphique des champs magnétiques laplaciens et tourbillonnaires à lignes de flux planes. *R. G. E.*, t. 14 (1923), p. 347-357, 395-403.
- [9] MULLER A. O., Ueber eine neue Methode zur Zeichnung der Feldbilder magnetischer Kraftlinien, *Arch. f. Elekt.*, t. 17 (1927), p. 501-510.
- [10] BAIRSTOW L. et BERRY A., Two dimensional solutions of Poisson's and Laplace's equation, *Proc. Roy. Soc.*, t. 95 (1919), p. 457-475.
- [11] GUEBHARD A., Figuration électro-chimique des lignes équipotentielles sur des portions quelconques du plan, *Journ. de Phys.*, t. 1, p. 205-222, Sur la figuration électrochimique des systèmes équipotentiels, *Journ. de Phys.*, t. 1, p. 483-492.
- [12] MELE-SHAW, *Stream line motion of a viscous film*. Report Brit. Assn. 78 th. meeting. Bristol 1898, p. 136-142.
- [13] PERES J. et MALAVARD L., La méthode d'analogies rhéographiques et rhéométriques. Installation de recherches du Laboratoire d'analogies électriques de l'Institut de Mécanique des Fluides, *Bulletin de la Soc. Française des Électriciens*, t. 8, n° 92 (août 1938), p. 715-744.
- [14] KLEYNEN P. H. A., Le mouvement d'un électron dans le champ électrostatique à deux dimensions, *Revue Technique Philips*, t. 2 (1937), n° 11.
- [15] GABOR, Mechanical Tracer for Electron Trajectories, *Nature*, t. 39 (février 1937).
- [16] LANGMUIR, Automatic Plotting of Electron Trajectories, *Nature*, t. 39 (1937), p. 1066.
- [17] ZWORYKIN and MORTON, *Television*, Édition de 1945, p. 82-83.
- [18] JEANS, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, 5^e édition, p. 261.
- [19] PIERCE, *Journal of Applied Physics* (août 1940), p. 549.
- [20] GOUDET G. et MUSSON-GENON R., *Le Journal de Physique et le Radium*, t. 6 (juillet 1945), p. 185-195.
- [21] TAYLOR et SHUMANN, Problems of flow in compressible fluids, *P. R. S.*, London (1928), t. 121, p. 194.
- [22] MALAVARD L., Application des analogies électriques à la solution de quelques problèmes de l'hydrodynamique, *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air* (1934), fascicule n° 57.
- [23] THUM et BAUTZ, *Zeits. Verlag Deutsch. Ing.* (1935), p. 1303.
- [24] SALET, Détermination des tensions dans les arbres de révolution soumis à la torsion, *Bull. Assoc. Tech. maritime et aéronautique*, t. 40 (1946). Amélioration de la méthode, *Ibid.*, t. 41 (1937).
- [25] MALAVARD L., Étude de quelques problèmes techniques relevant de la théorie des ailes, *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air*, n° 153.
- [26] MALAVARD L., Les analogies électriques comme méthode auxiliaire de la photoélasticité, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (4 janvier 1938).
- [27] PERES-MALAVARD, Sur les analogies électriques en hydro-dynamique, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (18 avril 1932).
- [28] LEHMANN Th., Détermination graphique des champs magnétiques laplaciens et tourbillonnaires à lignes de flux planes. *R. G. E.*, t. 14 (7 juillet 1923, 29 décembre 1923), p. 347-357 et p. 395-403.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

L'émission secondaire

Vu et Approuvé

Paris, le 12 Février 1947.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

Signé : J. CABANNES.

Vu et Permis d'Imprimer

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS.

Signé : G. ROUSSY.

